

ترجمہ پرویز شہریاری

مسیر ریاضیات جدید



و. و. سائر W. W. SAWYER

مسیر ریاضیات جدید

ترجمه پرویز شهریاری



سازمان چاپ و نشر مشهد

نام کتاب، مسیر ریاضیات جدید
A Path to Modern Mathematics
و. و. سایر W. W. Sawyer
ترجمه پرویز شهریاری
نوبت چاپ، دوم
تیراژ ۳۳۰۰ نسخه
چاپ و صحافی، سازمان چاپ مشهد
تاریخ انتشار، بهار ۱۳۶۹

آدرس: مشهد - صندوق پستی ۱۵۶۷ - ۹۱۳۷۵
تهران - صندوق پستی ۵۷۴۶ - ۱۵۸۷۵
همه حقوق محفوظ است.

چه باید کرد تا دانش آموزان و دانشجویان بتوانند در جریان پیشرفت‌های ریاضی قرار گیرند؟ برنامه‌های درسی دبیرستانی و بازسازی آن‌ها را چگونه باید تنظیم کرد تا بخش‌هایی از ریاضیات جدید، که هم برای کسانی که ریاضیات خالص را دنبال می‌کنند و هم برای مهندسان و آمارگران و فیزیک‌دانان بی‌اندازه اهمیت دارد، به صورتی عینی و ملموس مورد توجه قرار گیرد.

مفهوم‌هایی از ریاضیات جدید، همچون نگاشت‌ها، ماتریس‌ها، فضاهای برداری و غیره، در بدو امر چنان انتزاعی و دور از زندگی و عمل به نظر می‌آیند که بسیاری را به این اعتقاد رسانده است که، جز در رده‌های بالای تحصیلی و رشته‌های ریاضی دانشگاه‌ها، نباید به آن‌ها پرداخت.

ولی در واقع چنین نیست. ریاضیات جدید از درون ریاضیات سنتی زاده شده و معرفی تکامل طبیعی و قانون‌مند آن است. از یک طرف، نیازهای علم و صنعت و، از طرف دیگر، برخی نارسایی‌های ریاضیات سنتی، محرك اصلی زایش ریاضیات جدید بوده‌اند؛ و پروسه سایر، در این کتاب، توانسته است این دو جنبه ریاضیات جدید را به خوبی نشان دهد.

در این کتاب نشان داده شده است که، انتزاعی‌ترین مفهوم‌های ریاضیات جدید، رابطه‌ای جدی با ریاضیات سنتی و هم با عمل و زندگی دارند. این کتاب، علاوه بر آن که می‌تواند راهنمای خوبی برای همه برنامه‌نویسان باشد، می‌تواند مورد استفاده دانش آموزان، دانشجویان و، به خصوص، معلمان ریاضی قرار گیرد و ذهن آن‌ها را در زمینه بسیاری از مفهوم‌های ریاضیات جدید روشن کند.

مترجم

تمحيح ا غـلاط

صفحه	سـطر	غلط	صحيح
۹	۱۸	<i>Intoducting</i>	<i>Introducing</i>
۲۲	۱	مختصمان	متخصصان
۴۲	۵	نقطهء I	نقطهء E
۲۵۷	۱	بدهيم .	حذف شود

فهرست

۹	مقدمه پرفسور ای. ك. آندرونوف بر ترجمه روسی كتاب
۱۳	مقدمه نویسنده كتاب بر چاپ ترجمه روسی آن
۱۷	پیش گفتار
۳۱	فصل اول - حساب فضا
۶۳	فصل دوم - واژه نامه هندسی
۸۹	فصل سوم - نگاشتها و ماتریسها
۱۱۳	فصل چهارم - سادگی پنهان
۱۳۳	فصل پنجم - فایده روش معادلهها
۱۵۷	فصل ششم - درمسیر کاو برد
۱۸۷	فصل هفتم - درمسیر طبقه بندی منظم
۲۱۱	فصل هشتم - درباره خطی بودن
۲۳۱	فصل نهم - دوران یعنی چه؟
۲۵۵	فصل دهم - فضاهای متری و باناخی
۲۹۹	پاسخ تمرینها

مقدمه پروفیسور ای. ک. آندرونوف بر ترجمه روسی کتاب

«مسیر ریاضیات جدید»، نخستین کتابی نیست که از ریاضی‌دان و مربی مشهور انگلیسی، و. و. سایر، برای خوانندگان شوروی ترجمه می‌شود. از این نویسنده با استعداد، دواثر دیگر هم، در زمینه اندیشه‌های ریاضی (که بازبانی ساده نوشته شده‌اند)، در اتحاد شوروی به چاپ رسیده است: «ورودی به ریاضیات» و مقاله «جبر». سایر کتاب‌های بی‌اندازه جالبی دارد که، به‌طور عمده، خصلت، آموزشی دارند. مساله‌هایی که در این کتاب‌ها طرح شده‌اند، در واقع، محصول سالیان دراز تجربه نویسنده در زمینه آموزش ریاضی و تدریس در موسسه‌های تربیت دبیر ریاضی، می‌باشد.

سایر، یکی از هواداران پرشور بازسازی مضمون سنتی ریاضیات و روش‌های تدریس ریاضی است. با وجود این، به اعتقاد او، این بازسازی را نمی‌توان و نباید یک طرفه و بدون مطالعه انجام داد. باید دید، چه جنبه‌هایی از ریاضیات، در گذشته نزدیک، برای دانش و صنعت ارزش داشته است و، ضمناً، باید این مساله را هم حل کرد که، چگونه می‌توان ریاضیات را، برای علاقه‌مندان، به اندازه کافی قابل فهم و نیروی آفرینندگی و خلاق آن‌ها را بیدار کرد.

در ارتباط با موضوع اخیر، سایر، برای آمادگی معلم و علاقه‌مندی و دبستگی فوق‌العاده او نسبت به حرفه‌اش، اهمیت زیادی قایل است.

در این مورد، سری کتاب‌های «ورودی به ریاضیات» (*Introducing Mathematics*)، که می‌خواهد آن را ادامه دهد، بسیار جالب است. هدف او از این سری آن است که «ماهیت و جوهر درس ریاضی» را به

خواننده بدهد و اندیشه‌های ریاضی را، به جالب‌ترین و مفهوم‌ترین صورتی، برای شنوندگان دبیرستانی خود مطرح کند. کتاب در حال و هوای موضوع‌هایی نوشته شده است که به بازسازی برنامه ریاضی دبیرستانی مربوط می‌شوند. هدف بازسازی برنامه دبیرستانی، بازتابی است از شعار «به سمت ریاضیات جدید» و، ماهیت آن، عبارت است از کشتی که برای نزدیک کردن برنامه‌های ریاضی دبیرستانی به سمت ریاضیات جدید و به سمت نیازهای روز زندگی امروزی، وجود دارد. ولی، حل این مساله، آن‌طور که به نظر می‌رسد، خیلی ساده نیست. چه زمینه‌هایی از ریاضیات جدید و کدام اندیشه‌ها و مفاهیم را باید به برنامه ریاضیات دبیرستانی اضافه کرد؟ این کار را، در چه مرحله‌ای از پیشرفت ریاضیات، و با چه ردیفی، باید انجام داد؟ با چه دقتی و در چه درجه‌ای از کمال و تعمیم؟ این‌ها، پرسش‌هایی قدیمی است که دشواری آموزش ریاضی را روشن می‌کنند: از نظرات تاریخی، شیوه آموزش ریاضی، نمی‌تواند از موقعیت‌های دانش ریاضی جدا باشد و، بیش از اندازه، از آن عقب بیفتد. چه باید کرد تا هر نسل تازه، بتواند با پیشرفت‌های ریاضی زمان خود آشنا شود، آن‌ها را به خدمت جامعه و ترقی آن بگیرد و نیروی بالقوه‌ای برای پیشرفت‌های بعدی، به وجود آورد.

نویسنده، در کتاب حاضر، تلاش می‌کند تا عناصرهای باارزشی از ریاضیات جدید را مشخص کند که، به اعتقاد او، می‌توانند در برنامه ریاضی دبیرستانی جای گیرند. او، ضمن بررسی زمینه‌های جداگانه‌ای که در گذشته نه چندان دور، در ریاضیات کشف شده‌اند و، به اعتقاد همگان، اهمیت زیادی در فعالیت‌های انسانی و دانش علمی دارند (مثل نگاشت‌ها، فضاها، برداری و غیر آن)، به خوبی روشن می‌کند که، این اندیشه‌ها و مفاهیم، از اندیشه‌ها و مفاهیم ریاضیات سنتی ریشه گرفته و تکامل یافته‌اند و ادامه یا تعمیم طبیعی آن‌ها به شمار می‌روند، منتهی در درجه‌ای از انتزاع که، نسبت به قبلی‌ها، مرتبه‌ای بالاتر را مشخص می‌کنند.

نویسنده، به کمک مثال‌های مشخص و مختلفی، این مطلب را روشن می‌کند که: «ظرفیت جبر، هندسه و آنالیز ریاضی، خیلی بیش از آن چیزی است که قبلاً به نظر می‌رسید». اگر قبلاً، عرصه فعالیت جبر را، جمع‌بندی

رابطه‌ها و ویژگی‌های عدد به حساب می‌آوردند، امروز دیگر می‌توان هر نوع موضوعی را - عمل‌ها، جابه‌جایی‌ها (حرکت‌ها) و غیره - با عبارات‌های جبری بیان کرد.

مولف، با استعداد فوق‌العاده‌ای که در طرح موضوع‌های ابتکاری دارد، خواننده را از فضای برداری (بر اساس «گره - سگ») و ماتریس‌های گذراند و به طرف بحث مربوط به مفهوم خطی بودن می‌کشانده؛ و سرانجام، این گشت و گذار جالب و سرگرم‌کننده، در سرزمین پرخيال اندیشه‌فروشه درباره‌ی تعمیم مفهوم دیفرانسیل‌گیری و اندیشه‌ی باناخ درباره‌ی تعمیم مفهوم فضا، به پایان می‌رسد.

نویسنده، به شرح منظم موضوع، آن‌طور که در کتاب‌های درسی معمولی است، نمی‌پردازد، بلکه تنها اندیشه‌ها و مفاهیم‌های کلیدی بخش‌های مورد نظر خود، در ریاضیات، را در اختیار خواننده می‌گذارد. او هر جا، روی اندیشه‌هایی تکیه می‌کند که ریاضی‌دانان را به کشف مفاهیم‌های تازه‌ای کشانده است و چنان دورنمایی را طرح می‌ریزد که در انتظار پیشرفت بعدی ریاضیات است. نویسنده، با توفیق کامل، توانسته است مساله‌هایی را پیدا کند که، به کمک آن‌ها، کاربرد بخش‌های مورد بررسی او در ریاضیات، به خوبی روشن شود.

این کتاب، می‌تواند برای گروه وسیعی از خوانندگان مفید باشد، که از جمله آن‌ها، می‌توان از دانش‌آموزان سال‌های آخر دبیرستان، دانشجویان رشته‌های ریاضی و فنی، دبیران رشته ریاضی و همه کسانی که، به نحوی با ریاضیات سروکار دارند و یا به آن علاقه‌مندند، نام برد.

آندرونوف

مقدمه نویسنده کتاب بر چاپ ترجمه روسی آن

احتمالاً، خوانندگان این کتاب در اتحاد شوروی، بخواهند از اوضاع واحوالی که موجب نوشتن این کتاب شده است، آگاه شوند.

پرتاب نخستین ماهواره شوروی به فضا، در سال ۱۹۵۷، تأثیر عظیمی در امریکا داشت. از آن جا که، پیشرفت علمی و فنی، ارتباط مستقیمی با آموزش ریاضی جوانان دارد، تصمیم گرفته شد، بدون هیچ درنگی، در سیستم آموزشی، و در نوبت اول در برنامه های ریاضی، یک رشته تغییر داده شود. شعار «آموزش ریاضی را بازسازی کنید!» به میان کشیده شد. ولسی تفسیر نادرست، در بیشتر موردها، نقش این شعار را تا حد صفر، تقلیل داد. مقام های دولتی، با احساسی ناشی از غیرتی شبه مذهبی، از هر چه که در این جهت بود، دچار وجد و سرور می شدند. ظاهراً، آنها نمی فهمیدند که ایالت های متحد امریکا، از جمله معدود کشورهایی بود که، در سال های ۱۹۰۵، در برابر حرکت جهانی تغییر آموزش ریاضی، عکس العملی از خود نشان نداد. به همین مناسبت، تمامی بنای ریاضیات امروزی، در آن جا، بر شالوده ای کهنه قرار داشت. در نتیجه، باب روز کردن ریاضیات هم، خصلتی سطحی و بی پایه پیدا کرد؛ حرف بیشتر از اندیشه بود. می ترسم، امکان های مادی و شور و شوقی که صرف این تبلیغ می شود، ناحق باشد، به خصوص اگر به ضرر جدی ایس-تبلیغ بردستگاه آموزشی سایر کشورها توجه کنیم. در دوره اقامت خود در غنا، ناظر این تأثیر هلاکت بار شیوه امریکائی بر کشورهای افریقائی بودم.

باید علیه این تعریف و اشتباه کاری، به مبارزه ای لازم و مفید برخاست

ومن، تنها روش درست ومؤثر را درین نبرد، درپیشنهادهای عملی می دانم که کوشش کرده ام دراین کتاب مطرح کنم.

ویژگی هایی که بر انسان، به خاطر حرفه او، تحمیل می شود، تا حدی آمیزش افراد با تخصص های مختلف را دشوار می کند. بنا براین، ریاضی دانی که درمرکز کارهای ریاضی و کشف ها و موفقیت های این دانش قرار دارد، در آمیزش با معلمی که وقتی برای بالا بردن سطح آگاهی های خود پیدا نمی کند، به نوعی دشواری برخورد می کند. به خصوص در امریکا، این جدائی بیشتر احساس می شود. ریاضی دانان، که به «خلوص و پاکی» موضوع کار خود افتخار می کنند، فیزیک دانان را گروهی پایین تر از خود به حساب می آورند و مهندسان را، اصلاً به حساب نمی آورند. استاد تعلیم و تربیت، در مبارزه ای دائمی با «بی حاصل بودن» دانش های آکادمیک است و معلمان آینده را، با روشی زیان بخش آماده می کند؛ او به معلمان آینده یاد می دهد که، چگونه می توان دانش را، بدون استناد به محتوی آن ها، به دیگران آموخت. در نتیجه، در بیشتر دبیرستان های آمریکایی (و حتی گاهی برخلاف میل معلم)، ریاضیات به صورتی کاملاً بی معنی و بدون محتوا، تدریس می شود. معلم در مسوقیتی نیست که بتواند، به نظر انتقادی به دستورها و اشاره های مربیان دانشگاهی خود بنگرد و علیه نظرهای آن ها عمل کند.

در میان مسئولان با نفوذ آموزش دبیرستانی، به عده کمی می توان برخورد که دیدی واقع بینانه داشته باشند. برای پر کردن شکاف هایی که در آموزش ریاضی وجود دارد، تلاشی انجام نمی گیرد، بلکه به طور ساده آن ها را می پوشانند و مخفی می کنند، درست همان طور که ترك های دیوار، با کاغذ دیواری تازه ای پوشانده می شود. به همین مناسبت، و به خصوص در مرحله های نخستین، بحثی که به خاطر نوسازی برنامه ها جریان داشت، منجر به ورود اصطلاح های تازه در ریاضیات دبیرستانی شد، و نه اندیشه های تازه (که زمان بیشتری برای درك آن ها لازم بود). معلم، در هر جا که فرصت کند، از واژه «مجموعه» استفاده می کند و، گمان می کند که جزو پیش گامان پژوهش های آموزشی در آمده است. این واژه، چنان صورت پر رمز و افسانه ای

پیدا کرده است که به کلی از اعتبار افتاده و مفهوم واقعی خود را از دست داده است. و دلیل این که من، در این کتاب، از این اصطلاح خاص کاملاً مناسب تقریباً استفاده نکرده‌ام، همین است، زیرا از این ترس داشتم که به وسیله خوانندگانی که به آن دلبسته شده‌اند، به صورت نادرستی تفسیر شود.

به خاطر همه این‌ها و به خاطر شناختی که از این انقلاب خیالی، در آموزش ریاضی امریکا داشتم، در برابر این دگرگونی زودرس، وظیفه سنگینی درخود احساس کردم. این حرکت اصلاح طلبانه در انگلستان هم صورت گرفت. ولی در آن جا خصلتی داشت که می‌خواهم درباره آن اندکی صحبت کنم. در این حرکت، معلمانی شرکت فعال داشتند که، از نظر سطح دانش خود، هیچ کمبودی نسبت به استادان ریاضی دانشگاه نداشتند (و حتی گاهی، از برخی جهت‌ها، از آن‌ها هم پیشی می‌گرفتند). علت این وضع، چنین بود: در آن زمان، هنوز مسأله مربوط به آموزش عمومی، حل نشده بود و نقش اصلی آموزش نسل آینده، به عهده مدرسه‌های خصوصی بود که در آن‌ها، شرایط مرییان و معلمان، خیلی بهتر از موسسه‌های آموزشی دولتی بود. بسیاری از ریاضی‌دانان با استعداد، بعد از آن که دانشگاه را تمام می‌کردند، به این مدرسه‌ها می‌رفتند و وظیفه دبیری ارشد را بر وظیفه آسایشگاهی دانشگاه ترجیح می‌دادند. این معلمان جوان، که دانش والایی داشتند، در یک دوره نسبتاً طولانی، قریب ۳۵ سال - از سال ۱۸۶۷ تا سال ۱۹۰۲ - مبارزه به خاطر اصلاح آموزش ریاضی را، در برابر مخالفان دانشگاهی آن، رهبری می‌کردند. به این ترتیب، هسته حرکت را کسانی تشکیل می‌دادند که هم در دانش ریاضی، در سطحی بالا بودند و هم، به اندازه کافی، تجربه معلمی داشتند. آغاز سال ۱۹۰۲ را باید نقطه اوج این حرکت دانست، به نحوی که نمایندگان همه تخصص‌هایی که به نحوی با ریاضیات سروکار داشتند، در این جنبش شرکت داشتند: مهندسان (کسانی همچون پهدی)، فیزیک‌دانان (کسانی مثل هوی‌ساید). معلمان، مرییان و استادان جوان دانشگاه همه، این مطلب را قبول داشتند که، جنبش رو به رشدی که مدرسه‌های ممتاز را فرا گرفته است، اندیشه‌هایی دارد که برای مدرسه‌های

آموزش عمومی هم، می توانند مفید باشند. مطلب این این بود: بنا به گواهی
سند های دبیرستانی، بچه های خانواده های پول دار، که در شبانه روزی ها تحصیل
می کردند، معمولاً، امتیاز خاصی از نظر استعداد نسبت به دیگران نداشتند،
به همین مناسبت، معلمان در جست و جوی روش هایی برای آموزش بودند که
به کمک آن ها بتوانند ریاضیات را، برای دانش آموزانی با علاقه ها و
استعداد های مختلف، ساده و قابل فهم سازند.

به نظر می رسد که، برای حل دشواری های آموزش ریاضیات، به مرکز
رهبری کننده نیرومندی نیاز داریم، که بتواند، نه تنها نیاز های دانش و
صنعت، بلکه نیاز های تمامی جامعه را، در مجموع، در نظر بگیرد. این
مرکز، باید افرادی با تخصص های مختلف را دور هم جمع کند، که از آن
جمله اند، ریاضی دانانی که با مسأله آموزش آشنا هستند و دریانی که بر ریاضیات
تسلط دارند.

در پایان، می خواهم اعتراف کنم که، نیرو و شور و شوقی که به خاطر
برنامه های تازه، در اتحاد شوروی پدید آمده مرا سخت تحت تأثیر قرار
داده است و خیلی خوشحال خواهم شد، اگر کتاب من بتواند، در روشن-
کردن گوشه ای از این دشواری، برای خوانندگان آن در اتحاد شوروی،
مفید واقع شود.

و. و. سایر

تورونتو - ۴ مه سال ۱۹۷۱

پیش‌گفتار

چقدر خوب است که خواننده، از همان سطرهای اول کتاب، بتواند تصویری دربارهٔ مضمون کتاب، هدف آن و درجهٔ دشواری آن، پیدا کند. در این رابطه، باید بلافاصله بگوییم که، این کتاب، برای معلمی که می‌خواهد در آموزش ریاضی شاگردان ۱۱ تا ۱۸ سالهٔ خود، نوآوری‌هایی داشته باشد، می‌تواند مفید باشد؛ این کتاب می‌تواند، نوعی کتاب درسی، برای دانش‌آموزان سال‌های آخر دبیرستان به حساب آید؛ همچنین، معلمانی هم که در کلاس‌های پایین‌تر به تدریس ریاضی مشغول‌اند و در رشتهٔ تخصصی ریاضیات هم تحصیل نکرده‌اند، می‌توانند بهره‌های زیادی از این کتاب ببرند. کتاب فرض را بر این گرفته است که خواننده، با مبانی آنالیز ریاضی آشنا است. ولی، این به معنای آن نیست که، برای خواندن همهٔ بخش‌های آن، آشنایی با آنالیز ریاضی ضرورت دارد. مثلاً، در فصل‌های اول و سوم، روشی را تکامل داده‌ایم، که برای نخستین بار در مجله *Scientific American* مورد استفاده قرار گرفته است، و اگر انتقادی بر آن وارد باشد، ظاهراً، به این خاطر است که بیش از حد ساده شده است. و یا، بخش مهمی از فصل نهم در دبیرستان‌ها مورد آزمایش قرار گرفته است و برای دانش‌آموزانی که تنها با مقدمات جبر و قضیهٔ فیثاغورث آشنا باشند، قابل فهم است. در کتاب، تا جایی که ممکن بوده است، از زبان ریاضیات مقدماتی استفاده شده است ولی، مگر ممکن بود، تمامی کتاب را در این چارچوب نوشت؟ البته نه، و این، دلیل دارد.

من باروش‌های مختلفی، برای طرح ریاضیات جدید، برخورد کرده‌ام

که، گاهی، به کلی نامفهوم و رمزگونه هستند: مفهوم تازه، بدون هیچ توضیحی وارد شده است، دانش آموزانه از این مطلب اطلاع پیدا می کند که این مفهوم از کجا آمده است و نه یاد می گیرد که چگونه باید آن را درک کرد. دانش آموزان تنها باید باور کنند که این مفهوم ریاضی، بی اندازه مهم است و بعد، در تمامی زندگی، این پرسش برای آن باقی باشد که چرا ولی مگر نه این است که در ریاضیات، همچون سایر رشته های دانش، چیزی را باور نمی کنند، بلکه همیشه، و به خصوص در ریاضیات، تنها ثابت می کنند. لزومی ندارد که مشاجره مربوط به اصلاح آموزش ریاضی را زنده کنیم که منجر به «شست و شوی مغزها» شود، در نتیجه، هر گونه تمایل به تفکر انتقادی را، در میان معلمان از بین برد، قدرت هر گونه خلاقیتی را از آن ها سلب کرد و نتوانستند پاسخی برای این پرسش پیدا کنند که، به این ترتیب، وجود آن ها چه ضرورتی دارد. اگر، به طور ساده و سطحی، چند اندیشه و مفهوم ریاضیات جدید را بیورید و به صورتی کاملاً انتزاعی به شاگردان خود هدیه کنید، بدون این که بستگی آن ها را با بخش های دیگر ریاضیات نشان دهید، بدون این که مساله هایی از زندگی و دانش طرح کنید که، به کمک این اندیشه ها و مفهوم ها، قابل حل باشند، و بدون این که دانش آموزان را قانع کنید که چرا ریاضی دانان برای این جنبه های تازه دانش ریاضی این همه اهمیت قایل اند، مشکل بتوان گفت که شمار ریاضیات جدید یاد داده اید.

بنابراین، ضمن شرح هر موضوع تازه ای، باید روشن کرد که چه اندیشه هایی موجب پیدایش این مفهوم تازه شده اند و چه چشم اندازی در برابر تکامل آینده آن قرار دارد. مگر نه این است که، در سده ما، همه آن ها که کشف های اساسی ریاضی را انجام داده اند، خود در محیط ریاضی سده گذشته پرورش یافته اند؟ و درست همین ریاضیات سده گذشته، تخیل آن ها را بازور کرده است. ریاضی دانان سده بیستم چه کرده اند؟ آن ها به بخش هایی از منطق پاسخ گفته اند که در سده نوزدهم در ابهام و تاریکی باقی مانده بود، مساله هایی را حل کردند که در سده نوزدهم حل نشده بودند، برای پرسش هایی که قبلاً پاسخی تقریبی پیدا شده بود، پاسخی قطعی دادند، در جنبه هایی که به طور سطحی بررسی شده بود، عمیقاً نفوذ کردند، آن چه را که پراکنده به نظر می رسید

به هم پیوند دادند، حالت خاص را تعمیم دادند و به نتیجه‌های کلی‌تری رسیدند. اهمیت اساسی کشف‌های سده بیستم، بیشتر از این جهت است که بردشواری‌های سده نوزدهم، روشنی انداخته است. وقتی که، بدون استناد به گذشته، از ریاضیات امروزی صحبت کنیم، مثل این است که کسانی را به تماشای پرده سوم نمایشی دعوت کنیم که از پرده‌های اول و دوم آن هیچ اطلاعی ندارند. ریاضیات سده‌های هفدهم تا نوزدهم، سرشار از اندیشه‌های آنالیز ریاضی بود. البته، شاخه‌های جداگانه‌ای از ریاضیات را (مثل هندسه تصویری و یا برخی مساله‌های مربوط به نظریه عددها)، می‌توان، به طور جداگانه و بدون یاری گرفتن از آنالیز ریاضی، مورد بررسی قرار داد. ولی اگر کسی بخواهد تاریخ پیشرفت ریاضیات را در فاصله سال‌های بین ۱۶۰۰ و ۱۹۰۰، بدون توجه به اندیشه‌های مربوط به آنالیز ریاضی بنویسد، کار او نمی‌تواند مقبولیت عام پیدا کند، زیرا در هر زنجیر «علت و معلولی» او، فاقد حلقه‌های لازم خواهد بود.

در بسیاری از کشورها، تا همین سال‌های اخیر، یا اصلاً آنالیز ریاضی را در دبیرستان‌های خود نمی‌آموختند و یا به صورت ناکافی و تنها در سال‌های آخر دبیرستان، در برنامه می‌گذاشتند. در این گونه کشورها، حل مساله مربوط به آموزش ریاضیات جدید، خیلی دشوار، و حتی غیرممکن، می‌نمود. خوشبختانه، انگلستان را باید، در این مورد، استثنا دانست. بعد از بحث و مبارزه‌ای طولانی (که در سال‌های بین ۱۸۷۰ تا ۱۹۲۰ ادامه داشت)، تدریس آنالیز ریاضی در برنامه کالج‌ها گذاشته شد. شاید بهتر بود که تدریس آنالیز ریاضی برای دانش‌آموزان شانزده ساله، بدون وارد شدن تفصیلی در جزئیات انجام می‌گرفت، اگرچه برخی از ریاضی‌دانان، ماهیت و اصالت آنالیز ریاضی را در همین جزئیات می‌بینند. ولی این‌ها، به هر حال، برای هدف‌های مادر این کتاب، زیادی‌اند. آن چه برای ما مهم است، زبان آنالیز ریاضی است. همین قدر که کسی بداند $\frac{ds}{dt}$ به سرعت مربوط است، $\frac{dy}{dt}$ شیب منحنی را مشخص می‌کند، انتگرال با مساحت‌ها سروکار دارد و e به ربح

مرکب و رشد جمعیت مربوط می‌شود، آن وقت، همین توانایی اودراستفاده از زبان آنالیزریاضی به او کمک می‌کند تا آن چه را که در این کتاب مطرح شده است، به خوبی درک کند. بدیهی است که شما در این کتاب، هرگز با محاسبه‌های بفرنج، شبیه آن چه در آنالیز ریاضی یا جبر می‌بینید، برخورد نخواهید کرد.

در فصل ششم، بخشی را پیدا می‌کنید که «بدل آنالیز ریاضی» نامیده شده است. در این بخش به توضیح این مطالب پرداخته‌ایم که، چگونه شمارگر الکترونی قادر است مساله‌های پیچیده آنالیز ریاضی را، به زبان ساده حساب، ترجمه کند. من تاکید می‌کنم برای این نکته ندارم که، آشنایی با آنالیز ریاضی را باید این طور آغاز کرد، ولی، این شیوه را، به این جهت، در این بخش انتخاب کرده‌ام تا به خوانندگان که مدت‌هاست با آنالیز ریاضی سروکار نداشته‌اند، کمک کرده و بعضی از جنبه‌های آن را، به یاد آن‌ها آورده باشم. هدف من این نیست که اندیشه‌های آنالیز ریاضی را تحمیل کنم و یا نسبت به آن‌ها بی‌اعتنائی نشان دهم. در این کتاب، تنها جایی از آنالیز ریاضی استفاده شده است که مفهومی تازه آن را به یاد آورد و یا دقیقاً به آن مربوط باشد. این راه حل مساله، ممکن است تعداد خوانندگان این کتاب را تقلیل دهد، به هر حال ضررش کمتر از آن است که مفهوم‌های تازه را، از هیچ نتیجه بگیرم و، بامعلق نگاه داشتن آن‌ها در هوا، خواننده خود را دچار دودلی کنم.

ضرورت استدلال

امید من این است، خواننده‌ای که این کتاب را می‌خواند، تنها آشنایی ساده‌ای با مفهوم‌های تازه پیدا نکند، بلکه ضمناً حوزه کار برد آن‌ها را هم ببیند. خواننده، خود می‌تواند درباره میزان اهمیت این یا آن اندیشه تازه داوری کند. خواننده باید خود مستقلانه شیوه داوری را یاد بگیرد که هر بخش تا چه اندازه اهمیت دارد و یا، چیزی که در موردی اهمیت جدی دارد، ممکن است در موردی دیگر بی‌اهمیت باشد. مثلاً در مورد اصطلاح «ریاضیات جدید»، که به معناهای به کلی متفاوت و حتی گاهی متناقض با هم، به کار رفته است، سردرگمی‌هایی پیش آید. به خصوص، ممکن است این اصطلاح، با مفهوم‌های زیر اختلاط پیدا کند:

الف) کشف‌های ریاضی سده بیستم و کارهایی که قبل‌تر، و برای زمینه‌سازی آن‌ها، انجام گرفته است. به نظر من، کسانی که برای نخستین بار اصطلاح «ریاضیات جدید» را به کار برده‌اند، به این معنای آن توجه داشته‌اند؛

ب) ریاضیاتی که برای دانش و صنعت معاصر و آینده، ضروری است؛
پ) دگرگونی‌هایی که در حساب و سایر شاخه‌های ریاضیات، به خاطر استفاده از کامپیوترها و غیر آن، به وجود آمده است؛

ت) هرگونه روش تدریس ریاضیات، که به تازگی کشف شده باشد و یا به صورت عمومی درآمده باشد. علاوه بر این، اصطلاح «ریاضیات جدید» را، بدون هیچ پایه‌ای، و شاید تنها به عنوان نوعی زینت، در عنوان‌های موضوع خود به کار می‌برند.

وقتی که می‌خواهیم مسیر آموزش ریاضی را هموار کنیم، باید به همه این جنبه‌ها (و البته، به جز آخری) توجه داشته باشیم. وقتی که برنامه را تنظیم می‌کنیم، می‌خواهیم همه شاخه‌های معلوم ریاضیات را دربرگیرد، می‌خواهیم شاگردان ما با موفقیت‌های ریاضی سده پیشرفت‌های علمی و فنی به اندازه کافی آشنا باشد؛ مانمی‌خواهیم وقت و نیروی شاگردان را در زمینه‌هایی تلف کنیم که ماشین می‌تواند آن‌ها را خیلی سریع‌تر و دقیق‌تر انجام دهد. هدف ما این است که، هرچه ممکن است، بهتر به آن‌ها بیاموزیم. در واقع، تنها به شرطی می‌توان سطح آموزش ریاضی را بالا برد که به همه این نکته‌ها توجه داشته باشیم؛ و به یاد داشته باشیم که دنیای امروز با گذشته فرق دارد و، باز هم، به سرعت چهره خود را عوض می‌کند. در دنیای امروز، حتی يك نفر را هم نمی‌توان پیدا کرد که در همه رشته‌های دانش، صاحب صلاحیت باشد؛ رسیدن به چنین مرتبه‌ای، کارچندان ساده‌ای نیست.

يك ریاضی‌دان، باید خیلی کار کند و در کار خود بی‌اندازه سخت‌گیر باشد تا دست کم، به ۵٪ ریاضیات امروزی مسلط شود. و احتمال نمی‌رود که قادر باشد، به همین اندازه، در دانش، صنعت و روش آموزش هم، به مرتبه کاردانی برسد. البته، متخصصان دیگر هم، کم و بیش، با همین وضع نامساعد روبه‌رو هستند. معلم هم، موقعیت دشواری دارد؛ او باید آگاهی‌های به کلی متفاوت را

ازمختصان بگیرد و، سپس، آن‌ها را به صورتی واحد و قابل عرضه درآورد. و این، مساله‌ای است بی اندازه پیچیده که هرگونه کوتاهی در حل درست آن، ممکن است موجب زیان‌های بسیار بشود. دربرخی کشورها، وقتی که بحث بر سر آموزش ریاضی درمی گیرد، در همان آغاز کار، در میان ریاضی دانان نظرسنجی می کنند که، به نظر آن‌ها، کدام بخش یا بخش‌ها را، مهم تر می دانند. ضمناً، فرض را بر این می گذارند که، این پاسخ‌ها، خود به خود مشکل اصلی را حل می کنند و موضوع‌های لازم و جالب را برای آموزش بچه‌ها، در اختیار می گذارند. ولی به سختی می توان، گواهی بر ثمر بخش بودن این خیال خام پیدا کرد. برعکس، دلیل‌های محکمی مبنی بر بی فایده بودن این روش وجود دارد. و این، امری طبیعی است، چرا که متخصصان نه تنها از جهت دانش خود بایکدیگر فرق دارند، بلکه در فلسفه زندگی هم در یک جهت نیستند و هر یک از آن‌ها، چیزی را مهم می شمارد که دیگری آن را قابل اعتنا نمی داند. بی اعتنایی به این موضوع، شبیه آن است که شما اتومبیلی را به توصیه کسی خریداری کنید که، تنها به رنگ آن توجه دارد.

برای این که گمان نکنید که من، در این موضوع، مبالغه می کنم، نقل- قولی از یک مقالهٔ پروفیسور دیودونه، ریاضی دان نام داری که دربارهٔ آموزش ریاضیات جدید، بسیار نوشته است، می آورم.¹ دیودونه، از این موضوع شکوه می کند که، بسیاری از افراد، مقصود او را، وقتی که دربارهٔ ریاضیات کار- بسته و یا کامپیوترها صحبت می کند، به درستی نمی فهمند. دیودونه، دیدگاه خود را از ریاضیات جدید، این طور شرح می دهد (و دیودونه، این قسمت را، با حروف نمایان تری چاپ کرده است):

«مطالعهٔ ریاضیات، به تدریج ما را به سمت مفهومی‌هایی هدایت می کند که خیلی بیشتر از عددها و رابطه‌ها، انتزاعی اند... و سرانجام ما را به جایی می رساند که به کلی از جهان محسوس جدای شویم. این مفهومی‌های تازه، موجب طرح مجموعه‌ای

1. J. Dieudonné', L'Ecole française moderne des mathématiques, Philosophia Mathematica, 1, 2 (1964)

نامتناهی از مساله‌ها می‌شوند، که برای حل آن‌ها، ناچاریم مفهوم‌های دیگری را وارد کنیم که بازهم در درجه بالاتری از انتزاع قرار گرفته‌اند. دامنه این مفهوم‌ها، به سرعت گسترده‌تر می‌شود، مرتباً از سرچشمه ریاضیات، یعنی طبیعت، فاصله بیشتر می‌گیرد، و ریاضی‌دانان را، روز به روز، از حل مساله‌های مربوط به فیزیک و مهندسی دورتر می‌کند. بنابراین، می‌توان گفت که، ریاضیات جدید، در اساس خود، هیچ‌گونه هدف عملی و سودجویانه را تعقیب نمی‌کند، و نوعی نظام روشنفکرانه است که، فایده عملی آن، چیزی در حد صفر است. با وجود این، چه بسا که، همین اندیشه‌های انتزاعی، روزی کاربردی «نامنتظر» پیدا کنند. ولی ریاضی‌دان نمی‌تواند در پژوهش‌های خود، به درجه مفید بودن نتیجه‌گیری‌هایش در آینده، بیندیشد (چیزی که، در واقع، قابل پیش‌بینی نیست)، او بیش از هر چیز، می‌خواهد، از پدیده‌های ریاضی سردر آورد، پدیده‌هایی که به خودشان ختم می‌شوند. شك نیست که، هنوز، بسیاری هستند که به سختی این دیدگاه را می‌پذیرند. آن‌ها می‌خواهند که ریاضیات، در هر حال، در خدمت چیزی باشد و از فکر در این باره خجالت می‌کشند که، ریاضیات چیزی جز یک «زینت» نیست که تمدن امروزی آن را به خود آویخته است... ریاضی‌دانان، انتظار کاملاً ساده‌ای دارند: آن‌ها می‌خواهند، همان حق «زندگی» برایشان به رسمیت شناخته شود که برای دانشمندان اخترفیزیک و دیرین‌شناسان و شاعران به رسمیت شناخته شده است».

دیودونه، سپس، تأکید می‌کند که، در زمان ما، قریب ۸۰٪ از ریاضی‌دانان، مطلقاً علاقه‌ای به جنبه‌های کاربردی دانش خود ندارند. پروفیسور دیودونه حق دارد روش خود را آزادانه انتخاب کند و تنها به ریاضیات خالص بپردازد. ولی این راهم باید گفت که کالج‌های فنی و موسسه‌های آموزش عالی (که جنبه فنی دارند)، در تنظیم برنامه ریاضی خود، باید با احتیاط کامل باتوصیه‌های دیودونه برخورد کنند، زیرا ارزیابی‌ها و اندیشه‌های دیودونه با هدف آن‌ها

مطابقت ندارد. ظاهراً، دیودونه می‌خواهد به موسسه‌های آموزش عالی فنی توصیه کند، که، از آن جاکه با موضوع‌های عملی سر و کار دارند، باید از ریاضیات سده بیستم صرف نظر کنند و بیشتر و عمیق‌تر، به ریاضیات سده‌های گذشته پردازند، یعنی به دورانی که هنوز، این دانش، خود را به‌طور کامل، از حل مساله‌های مربوط به فیزیک و مهندسی جدا کرده بود.

نمی‌توان قبول نکرد که، سخنان دیودونه دربارهٔ چگونگی پژوهش‌های ریاضی معاصر، تا حد زیادی درست است. بخش مهمی از این پژوهش‌ها، ربطی به نیازهای دانشمندان، مهندسان، اقتصاددانان، جامعه‌شناسان و نمایندگان سایر دانش‌هایی که از ریاضیات استفاده می‌کنند، ندارد. با وجود این، در طرحی که دیودونه، ترسیم کرده است، مبالغه‌هایی وجود دارد. در ریاضیات جدید، جنبه‌هایی وجود دارد که هم به درد عمل می‌خورد و هم به کار ریاضیات خالص می‌آید. این پیش‌بینی کاملاً طبیعی است که بعضی از بخش‌های ریاضیات سده بیستم، در آینده، به همان اندازه برای مهندسان عادی و لازم باشد که ریاضیات سده هفدهم، برای مهندسان امروزی، ضروری است.

هدف این کتاب، نشان دادن اندیشه‌هایی از ریاضیات امروزی است که می‌توانند هم علاقهٔ ریاضی‌دانان و هم غیرحرفه‌ای‌ها را به خود جلب کنند. این اندیشه‌ها، به دیدگاهی از ریاضیات جدید مربوط می‌شوند که، کم و بیش، مورد قبول همه است و، طبق آن، کاربرد جبر، هندسه و آنالیز ریاضی، خیلی بیشتر از آن است که قبلاً تصور می‌شد و، مثلاً، گمان می‌رفت که جبر تنها با ویژگی‌های عدد سروکار دارد. امروز دیگر همه قبول دارند که طبیعت عمل‌ها (*operations*)، حرکات و غیر آن، خصلتی جبری دارند. به همین ترتیب، روندها و نمایش‌های هندسی‌را، خیلی گسترده‌تر از آن چه قبلاً گمان می‌رفت، می‌توان در آنالیز ریاضی به کاربرد.

در کتاب، مثال‌های بسیاری آمده است که، در عین حال، به درک یکی از بحث‌انگیزترین موضوع‌ها، یاری می‌رساند؛ این موضوع عبارت است از نحوهٔ رفتار معلم، در برابر انبوه تبدیل‌های صوری که در جبر وجود دارد. برای معلم جالب نیست که شاگردان ده‌ها تمرین خسته‌کننده و ملالت‌آور را

تنها به خاطر این هدف انجام دهند که، به طور مکانیکی، به انجام عمل های جبری عادت کنند. این موقعیت، در بعضی موارد، نتیجه ای اندوهبار به وجود می آورد: دانش آموزان تنها شکل صوری عمل ها را به خاطر می سپارند (یا به آنها عادت می کنند)، و تسلط خود را بر قانون های اصلی و سنتی جبر از دست می دهند. چنین دانش آموزانی، در مرحله های بالاتر، وقتی با موقعیت هایی از جبر عالی روبه رو می شوند که شباهت هایی با جبر مقدماتی داشته باشند، درمانده و ناتوان می شوند.

بعد از آن که برخی از فصل های این کتاب را نوشتم، با شگفتی متوجه شدم که، مضمون آنها، ارتباط مستقیمی با این مسأله پیدا می کند. با مطالعه این فصل ها، می توان متوجه شد که توانائی در ساده کردن تبدیل های جبر مقدماتی، برای مطالعه جبر جدید هم، بسیار مفید است.

البته، مراجعه به جبر جدید، تنها راه برای بررسی جبر مقدماتی نیست. جنبه های زیادی در دانش وجود دارد که به توانایی استفاده از زبان جبر ساده و، ضمناً درک عمیق آن، بستگی دارند و برای این منظور، باید نه به ریاضیات جدید، بلکه به همان ریاضیات سنتی پرداخت که، به اندازه کافی مورد کاوش قرار گرفته است. اکنون، زمان آن رسیده است از موضوع هایی یاد کنیم که، در این کتاب، مورد بررسی قرار نگرفته اند، ولی بدون توجه به آنها هم، نمی شود به مسأله های مربوط به آموزش ریاضی پرداخت.

بخش عمده ای از کتاب، به ریاضیات سده بیستم اختصاص دارد، ریاضیاتی که، در واقع، بسیاری از شاخه های خود را از تنه واحدی در ریاضیات سنتی قدیم، به دست آورده است. ولی، در گذشته های نزدیک، جوانه های تازه ای هم سر بر آورده اند که از خود ریشه این درخت سرچشمه می گیرند. این ها، شاخه هایی از ریاضیات هستند که مطلقاً با ریاضیات سنتی، ارتباطی ندارند. از این نوع، مثلاً می توان از منطق ریاضی نام برد. بسیار مفید می بود، اگر شرح کوتاهی از این شاخه های تازه می دادیم که، نه تنها مضمون ریاضی آنها را روشن کند، بلکه ضمناً و تا آن جا که مقدور است، گسترش امروزی آنها و تأثیر آنها بر آینده ریاضیات را هم توضیح دهد.

مسأله مربوط به خود کار کردن و رشد بی سابقه آن، ایجاب می کند که،

تغییرهایی در آموزش داده شود. پیش‌بینی علمی در این باره هم، می‌تواند بی‌اندازه مفید باشد. خودکار کردن، این امکان را به وجود آورده است که ماشین بتواند بسیاری از فعالیت‌های فکری و فیزیکی انسان را انجام دهد و، بنابراین قانون‌های دقیق موجود، این فعالیت‌ها را، استاندارد کند. بخش بزرگی از فعالیت انسان امروزی، تسلیم این موقعیت شده است، ولی هنوز سهم زیادی از وقت دانش‌آموزان صرف این گونه عمل‌های پیش‌پا افتاده می‌شود. روشن است که، این نوع آموزش، کهنه شده است. خودکار شدن بسیاری از جنبه‌های فعالیت، انسان را مرتباً به میدان کار خلاق نزدیکتر می‌کند، و این وضع، ویژگی‌هایی از انسان می‌خواهد که از نظر کیفیت و ماهیت خود، با گذشته فرق دارند؛ ویژگی‌هایی همچون فراست، نوآوری، باریک بینی، ابتکار و پابندی به اصول. و روشن است که «جامعه خودکار شده»، به پایه‌ای نیاز دارد که در سطح کاملاً بالایی از تکامل و خلافت قرار گرفته باشد.

بدون شك، حداقل سطح دانش هر عضو جامعه، دائماً بالاتر خواهد رفت. معلمان و همه کسانی که، به نحوی، با آموزش نسل جوان سر و کار دارند، به خصوص باید به همین نکته توجه داشته باشند. انسان به چنان نیروهای بی‌سابقه‌ای دست یافته است که، بیش از هر زمان دیگری، قدرت دخالت در دنیای دور و بر خود را دارد. باید، تا آن جاکه ممکن است، افراد بیشتری را آماده کرد تا، از این توانائی خود، به صورتی عاقلانه و ماهرانه استفاده کنند. بی‌تردید، انسان سال ۲۰۰۰، به شالوده علمی استوارتری، نسبت به زمان ما، نیاز دارد. به احتمال زیاد، انسان سده بیست و یکم، باید، به پژوهش در عمل‌هایی بپردازد که، به وسیله آن‌ها، بتوان دشواری‌های متعدد و مختلفی را حل کرد، و بدون تردید، ریاضیات هم، جای نمایانی در این پژوهش‌ها خواهد داشت. آن چه باقی می‌ماند، این است که راهی برای همه فهم کردن این پژوهش‌ها پیدا شود و در اختیار همگان قرار گیرد.

دشواری و دلتنگی

در آموزش نواختن پیانو، در آغاز کار، مرحله‌هایی وجود دارد که تنها

گام‌ها را تمرین می‌کنید، چیزی که قابل شنیدن نیست. این تمرین‌ها، بی‌اندازه ملالت آور است و شما را به تنگ می‌آورد، ولی جز انجام آن‌ها، چاره دیگری ندارید. این وضع، پدیده‌ای طبیعی است. برای یاد گرفتن جبرستی هم، همین وضع وجود دارد؛ شخص باید مقدار زیادی از وقت خود را صرف تمرین‌هایی کند که هم کسالت آورند و هم شامل نکته تازه‌ای نیستند؛ ولی باید از این مرحله گذشت تا به مسأله‌هایی رسید که، کم و بیش، جالب باشند. البته، همین اشکال، در مورد جبر جدید هم وجود دارد.

وقتی که فصل‌های اول و دوم را می‌نوشتیم، به نظر می‌رسید که شبیه پیش‌درآمد درامی است که تنها هنرپیشگان را به مردم معرفی می‌کند و طبیعی است که، در این مرحله، هنوز نمی‌توانند نظر تماشاگر را به خود جلب کنند خواننده، می‌تواند این فصل‌ها را به سرعت بخواند. ولی باید به یاد داشته باشد، که نتیجه‌گیری‌های این فصل‌ها، بارها و بارها مورد استفاده قرار خواهند گرفت. چند کلمه‌ای هم باید درباره زیر صفحه‌ها صحبت کنم. بعضی از آن‌ها، به نوشته‌هایی مربوط می‌شود که از آن‌ها نقل قول کردم، گروه دوم تاریخ مطلب را می‌دهد و گروه سوم به روشن کردن بعضی از جنبه‌های دشوار آن، می‌پردازد. به جز این، بیان دقیق خلاصه‌ای از آن چه در کتاب آمده است، کاری بسیار دشوار است. معمولاً، شرح مطلب را، با زبانی ساده و به یاری عبارت‌های کلی، شرح داده‌ام و، سپس، با شرح تکمیلی اضافه‌ای، آن را دقیق‌تر کرده‌ام. در نتیجه پیش‌درآمد، کوتاهی خود را از دست داده و برای فهم دشوار شده است. من، برای نجات از این وضع هم، به پاورقی متوسل شده‌ام در برخی مورد‌های نادری هم، که حدس زده‌ام دچار انتقاد خواننده می‌شوم، پاورقی داده‌ام. برخی از پاورقی‌های فصل چهارم، در واقع، تکمیل‌کننده شرح متن هستند. مضمون این پاورقی‌ها، انجام محاسبه‌هایی است که، برای شرح مطلب اصلی، اهمیتی جدی ندارند و، بنابراین، ممکن است خواننده نخواهد خود را به خاطر آن‌ها به زحمت بیندازد.

نام‌گذاری‌ها

برای نام‌گذاری تابع‌ها، دوروش وجود دارد: روش قدیمی و سنتی،

و روش جدید امروزی. اگر از روش نام گذاری سنتی پیروی کنیم، ممکن است موجب نارضایتی کسانی شود که توانسته‌اند، ولو با زحمت، به روش جدید عادت کنند. و اگر یکسره از روش علامت گذاری جدید استفاده کنیم، هواداران سنت را رنجانده‌ایم و، درواقع، مثل این است که آن‌ها را واداشته باشیم تا به زبانی خارجی، اندیشه‌های نو را یاد بگیرند. تلاش برای ترکیب دو روش هم، به پرحرفی اضافی زیادی نیاز دارد و، احساس می‌کنم، که به هر حال باید از روشی واحد استفاده کرد. من، روش سنتی را انتخاب کرده‌ام. پروفیسور هوچشیلد، ریاضی‌دان مشهور، در مقدمه‌ای که بر کتاب پروفیسور یاکوبسون درباره «جبرلی» نوشته است. درجایی، با تندی می‌نویسد: «در صفحه ۲۹۰، از نوعی علامت گذاری استفاده شده است که ناشی از رعایت اصلی است که در دوران وحشی‌گری معمول بوده است، یعنی مخلوط کردن عمل با یکی از معنی‌های آن». ولی، مگر همه ما، بر همین اساس تربیت نشده‌ایم؟ کنت^۱ و له‌بگ^۲ هم، از همین علامت گذاری استفاده می‌کرده‌اند. ما مثلاً، درباره تابع yx یا تابع $f(x)$ صحبت می‌کنیم. اعتقاد من درباره اصطلاح‌ها و علامت گذاری‌های سنتی، چنین است:

(۱) من معتقد نیستم که، در ریاضیات، می‌توان، چندجور فکر کرد. اگر از هوادار نشانه‌های سنتی خواهش کنیم، نمودار yx را رسم کند و، سپس، همین تقاضا را از هواخواه روش‌های جدید، منتهی با واژه‌ها و اصطلاح‌های دیگری بکنیم، هردوی آن‌ها، يك سهمی را رسم خواهند کرد. واژه‌ها متفاوتند، ولی مفهوم یکی است.

(۲) تنها در سطح بالاتر آموزش ریاضی، ممکن است استفاده از اصطلاح‌های سنتی، نامناسب باشد؛ و بنابراین، کاملاً طبیعی است که دانشمندانی همچون هوچشیلد، با دستگاه سنتی مخالف باشند، ولی برای کسانی که می‌خواهند محاسبه دیفرانسیلی و انتگرالی را بیاموزند، این دستگاه کاملاً مناسب و قابل قبول است، در این کتاب، تنها در فصل دهم، آخرین فصل کتاب، ممکن است دشواری‌هایی پدید آید. در پایان این فصل، نه تنها مسأله

1. *Caunt, Infinitesimal Calculus.*

۲. آ. له‌بگ: انتگرال‌گیری و جست‌وجوی تابع‌های اولیه.

نام‌گذاری‌های تازه را مطرح کرده‌ایم، بلکه به علت‌های ورود آن‌ها هم پرداخته‌ایم.

(۳) برای این‌که بتوان ریاضیات را ادامه داد، باید هم با نمادهای قدیمی و هم با نمادهای تازه، به اندازه کافی، آشنا بود.

در کتاب‌های درسی بسیار جالب سیمون^۱ و، همچنین، در «مبانی آنالیز جدید» دیودونه، که در حد تخصصی نوشته شده‌اند، تنها از علامت‌گذاری‌های تازه استفاده شده است. هیل^۲، در بررسی‌های جدی خود ترجیح داده است که از علامت‌گذاری‌های سنتی استفاده کند. سمیرنوف هم، در کتاب چند جلدی خود، به نام «دوره ریاضیات عالی»، علامت‌گذاری‌های سنتی را به کار برده است.

وقتی که له بگ، هیل و سمیرنوف می‌توانند، با اصطلاح‌ها و علامت‌گذاری‌های قدیم - که برای بسیاری از خوانندگان عادی‌تر است - درباره ریاضیات جدید فکر کنند، من هم به خود حق می‌دهم از آن‌ها پیروی کنم، به خصوص که کتاب من، بیش از آن‌ها در ریاضیات جدید وارد نشده است. با همه این‌ها، در این تردید ندارم که، اگر کسی بخواهد به صورتی عمیق‌تر ریاضیات جدید را بیاموزد، باید به اصطلاح‌ها و علامت‌گذاری‌های تازه مسلط باشد.

1. G. F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*.

۲. ا. هیل، ر. س. فیلیپس، آنالیز فونکسیونل ونیم‌گروه‌ها.

۱

حساب فضا

اگر بچه‌ای را در برابر پرسش‌هایی از این قبیل قرار دهیم که: «اگر به ۱ گربه و ۲ سگ، ۳ گربه و ۱ سگ اضافه کنیم، چند تا خواهیم داشت؟» یا «اگر ۲ گربه و ۱ سگ را ۳ برابر کنیم، چقدر خواهد شد؟» - به احتمالی، دچار مشکل شود. این پرسش‌ها، به‌خودی‌خود، پیش‌پا افتاده به نظر می‌رسند، ولی در واقع، می‌توانند به ساده‌تر کردن فهم مطلب، بسیار کمک کنند.

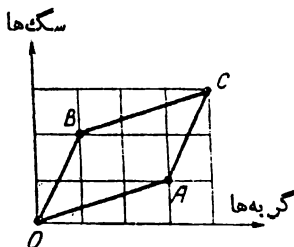
اگر جملگی جانوران پرسش اول را، با A و B نشان دهیم، حل مساله را می‌توان به این ترتیب نوشت:

$$A + 3 \text{ گربه و } 1 \text{ سگ}$$

$$B = 1 \text{ گربه و } 2 \text{ سگ}$$

$$C = 4 \text{ گربه و } 3 \text{ سگ}$$

سطر سوم، از جمع دو سطر اول به دست آمده است و، بنابراین، می‌توان نوشت: $C = A + B$. در شکل ۱، راه حل را روی یک کاغذ



شکل ۱

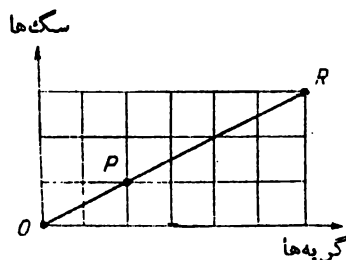
«شطرنجی» داده ایم. نقطه A به مختصات $(1, 3)$ به معنای ۳ گره و ۱ سگ است، نقطه های B و C را هم، به همین ترتیب، می توان معنا کرد. در شکل دیده می شود که، نقطه های O, A, B و C ، راس های يك متوازی الاضلاع اند. می توان، از طریق تجربه، تحقیق کرد، که، به هر ترتیبی عددها را انتخاب کنیم، به همین نتیجه می رسیم (در حالت های خاصی، ممکن است نقطه های O, A و B ، روی يك خط راست قرار گیرند؛ در این صورت متوازی الاضلاع، چنان «باریک» است که به يك پاره خط تبدیل می شود). برای کسی هم که مکانیک خوانده باشد، بستگی بین جمع و متوازی الاضلاع، موضوعی شناخته شده است: نیروها و سرعت هارا، طبق قاعده متوازی الاضلاع باهم جمع می کنند.

اکنون ببینیم، پرسش دوم که به ضرب مربوط است، روی صفحه شطرنجی به چه صورت درمی آید:

$$P \times 2 = \text{گره ۲ و سگ ۱}$$

$$R = \text{گره ۶ و سگ ۳}$$

این محاسبه ها نشان می دهند که $R = 3P$. این راه حل، در نمودار، متناظر است با نقطه های O, P و R (شکل ۲)، که روی يك خط راست و



شکل ۲

به نحوی قرار گرفته اند که نقطه R در فاصله ای از O ، که ۳ برابر فاصله P از O است، قرار دارد.

ضرب، چیزی جز تکرار جمع نیست و این به ما کمک می کند تا آن را به

وسیله نمودار نشان دهیم. از این جا آغاز می کنیم که، پشت سرهم، ۲ گربه و ۱ سگ را به «هیچ» اضافه کنیم. محاسبه به این صورت درمی آید:

$$+ ۰ \text{ گربه و } ۰ \text{ سگ} = ۰$$

$$+ ۲ \text{ گربه و } ۱ \text{ سگ}$$

$$P = + ۲ \text{ گربه و } ۱ \text{ سگ}$$

$$+ ۲ \text{ گربه و } ۱ \text{ سگ}$$

$$2P = Q = + ۴ \text{ گربه و } ۲ \text{ سگ}$$

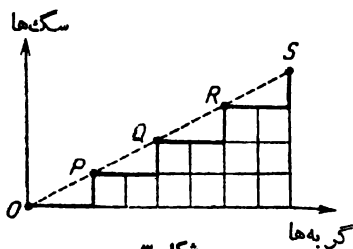
$$+ ۲ \text{ گربه و } ۱ \text{ سگ}$$

$$3P = R = + ۶ \text{ گربه و } ۳ \text{ سگ}$$

$$+ ۲ \text{ گربه و } ۱ \text{ سگ}$$

$$4P = S = ۸ \text{ گربه و } ۴ \text{ سگ}$$

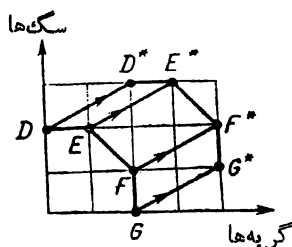
نتیجه ها را، بانقطه های O ، P ، Q ، R و S نشان می دهیم و آن ها را روی صفحه شطرنجی می بریم (شکل ۳). پاره خط هایی که این نقطه ها را،



شکل ۳

از راه مرزهای خانه های صفحه شطرنجی به هم وصل می کنند، تشکیل یک پلکان می دهند. از نظر حساب، هر بار چیزی ثابت را اضافه می کنیم - ۲ گربه و ۱ سگ - و از نظر نموداری، هر بار از نقطه ای به نقطه بعدی می رویم، به این ترتیب که ۲ گام به راست و یک گام به طرف بالا برمی داریم.

این اندیشه گام یکنواخت، برای مطالعه حرکت مفید است. خط کلفت $DEFG$ را روی شکل ۴، مثلاً، قطعه ای از مفتول فرض کنید که روی کاغذ قرار گرفته است. در آن صورت، D^* ، ۲ واحد به طرف راست و ۱ واحد

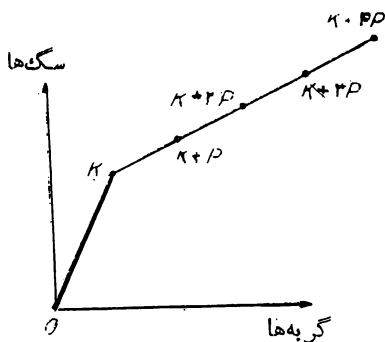


شکل ۴

به طرف بالا، نسبت به D قرار دارد؛ E^* در ۲ واحد سمت راست و ۱ واحد بالای E و به همین ترتیب، برای F و F^* ، G و G^* . خط کلفت $D^*E^*F^*G^*$ ، جای تازه‌ای است که مفتول ما می‌تواند اختیار کند. نشانه‌های پیکان، این جابه‌جایی مفتول را، از موضع $DEFG$ ، به موضع تازه‌آن $D^*E^*F^*G^*$ ، نشان می‌دهند. این گونه جابه‌جایی را، انتقال موازی گویند. در انتقال موازی، همه نقطه‌ها در یک جهت و به یک اندازه جابه‌جا می‌شوند. در مثال ما، هریکشان، متناظر است با اضافه کردن ۲ گره و ۱ سگ، یعنی اضافه کردن P . در نتیجه: $D^* = D + P$ ، $E^* = E + P$ و غیره.

قبلا دیدیم که، چگونه می‌توان روند ضرب را، به صورت نموداری، مجسم کرد، به شرطی که P را، پشت سرهم، به «هیچ» اضافه کنیم. به همین ترتیب، می‌توانستیم از مقدار معینی گره و سگ آغاز و، پشت سرهم، P را به آن اضافه کنیم. این حالت را، در شکل ۵، روشن کرده‌ایم.

به این ترتیب، توانستیم حساب یا جبری را بسازیم که به وسیله‌ای جای

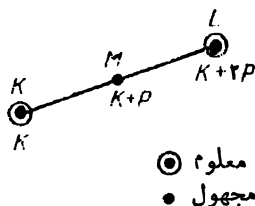


شکل ۵

نقطه‌ها بر صفحه، شرح داده می‌شود. ولی آیا این، ساختمانی مناسب است و، ضمناً، در چه نوع مساله‌هایی کاربرد دارد؟ نقطه‌های K ، $K+P$ ، $K+2P$ و غیره، در شکل ۵، ما را به یاد رد پاهای آدمی می‌اندازد که با گام‌های یکنواخت و در یک جهت حرکت کرده است، زیرا این نقطه‌ها روی یک خط راست قرار دارند و به فاصله‌های برابر، از یکدیگر، قرار گرفته‌اند. این مطلب، ما را به این فکر می‌اندازد که، جبرما، می‌تواند در مساله‌هایی مورد استفاده قرار گیرد که، در آن‌ها، صحبت از پاره خط‌های راستی است که به بخش‌های برابر تقسیم شده‌اند. تا این جا، نماد P را برای «۲ گربه و ۱ سگ» به کار می‌بردیم. اکنون، بهتر است P را به معنای هر تعداد دلخواه گربه و سگ بگیریم، تا برای حل مساله‌ها، مناسب‌تر باشد. مساله‌های ما، به این ترتیب، تنظیم می‌شوند: دو نقطه K و L داده شده است؛ چند گام P لازم است که، از طریق تعداد معینی از این گام‌ها، بتوان از نقطه K به نقطه L رسید؟

ساده‌ترین مساله از این نوع: رابطه‌ای برای نقطه M ، وسط پاره خط KL پیدا کنید. چون جای نقطه‌های K و L ، با اصطلاح تعداد «گربه‌ها و سگ‌ها»، داده شده است، بنابراین، جای نقطه M را هم، به کمک همین اصطلاح، پیدا خواهیم کرد.

اگر مسیر از نقطه K به نقطه L را با دو گام طی کنیم، آن وقت، درست از نقطه M رد می‌شویم. بنابراین، گام P را طوری انتخاب می‌کنیم که نقطه‌های K ، $K+P$ و $K+2P$ ، به ترتیب، بر نقطه‌های K ، M و L منطبق باشند. ولی این آگاهی را که، P را چگونه باید پیدا کرد. از کجا باید به دست آورد؟ این آگاهی را، با مشاهده نقطه اول (شکل ۶)، نمی‌توانیم



شکل ۶

به دست آوریم، زیرا این نقطه، خیلی ساده، به ما می گوید: $K = K$. با مشاهده نقطه دوم هم نمی توانیم آن را به دست آوریم، زیرا هنوز M مجهول است (به زودی، همان P به ما کمک خواهد کرد تا M را پیدا کنیم). ولی، نقطه سوم به ما می دهد $L = K + 2P$. اگر آن را، نسبت به P ، حل کنیم، به دست می آید: $P = \frac{1}{4}L - \frac{1}{4}K$. چون $M = K + P$ ، اگر به جای P مقدارش را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$M = K + \left(\frac{1}{4}L - \frac{1}{4}K \right) = \frac{1}{4}K + \frac{1}{4}L$$

(ضمناً، این نتیجه، نشان می دهد که M برابر است با واسطه حسابی $(L و K)$.)

مثلاً، فرض کنید بخواهیم وسط مسیر بین نقطه های $(2, 1)$ و $(8, 3)$ را پیدا کنیم با توجه به اصطلاح هایی که پذیرفته ایم:

$$K = 2 \text{ گربه و } 1 \text{ سگ؛ } L = 8 \text{ گربه و } 3 \text{ سگ}$$

بنابراین

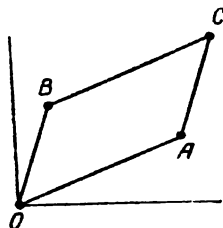
$$K = \frac{1}{4} = 1 \text{ گربه و } \frac{1}{4} \text{ سگ؛ } L = \frac{1}{4} = 2 \text{ گربه و } \frac{1}{4} \text{ سگ}$$

و در نتیجه

$$M = \frac{1}{4}K + \frac{1}{4}L = (5 \text{ گربه و } 2 \text{ سگ})$$

اکنون، به کاغذ شطرنجی خود برمی گردیم. نقطه $(5, 2)$ ، همان نقطه M است، نقطه وسطی که به دنبالش بودیم. وقتی که به خود اجازه دادیم تا از نصف سگ صحبت کنیم. در واقع، نوعی آزادی برای خود در نظر گرفتیم، ولی از این به بعد، با گسترش این آزادی، از مفهوم هایی مثل ۳ - گربه استفاده می کنیم. بدیهی است که، استناد به جانوران را، نباید در این جا جدی گرفت. اگر پای جانوران را به میان آورده ایم، به این جهت است که: (۱) نشان دهیم، اندیشه های مورد بررسی ما، بسیار ساده اند و می توانند حتی در دسترس بچه ها قرار گیرند، (۲) موقعیتی را بسازیم که، برای آن، جمع و ضرب،

معنایی طبیعی داشته باشد و ۳) عبارتهایی از نوع «جمع کردن گربه‌ها و سگ‌ها» را ذخیره کنیم، تا بعداً، به سادگی بتوانیم از عهدهٔ عمل با آن‌ها برآیم. رابطهٔ مربوط به وسط پاره خط، امکان اثبات این قضیهٔ مشهور هندسی را به وجود می‌آورد که: قطرهای متوازی الاضلاع، در نقطهٔ برخورد، یکدیگر را نصف می‌کنند. برای سادگی کار، فرض می‌کنیم، یکی از رئوس‌های متوازی الاضلاع در نقطهٔ O و رئوس‌های دیگر آن، در نقطه‌های A ، B و C باشند (شکل ۷). از آن‌چه قبلاً گفتیم (به یاد داشته باشید که «جمع کردن



شکل ۷

گربه‌ها و سگ‌ها»، همیشه متناظر است با متوازی الاضلاع)، نتیجه می‌شود که: $C = A + B$. ما می‌خواهیم ثابت کنیم که وسط OC منطبق است بر وسط AB . برای این منظور، آن‌ها را طبق دستور $M = \frac{1}{4}K + \frac{1}{4}L$ به دست می‌آوریم.

برای وسط AB به دست می‌آید $\frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B$ ؛ و برای وسط OC :

$\frac{1}{4}O + \frac{1}{4}C$ و یا به طور ساده $\frac{1}{4}C$. زیرا نقطهٔ O ، به معنای صفر گربه و

صفر سگ است. ولی می‌دانیم $C = A + B$ ، و بنابراین $\frac{1}{4}C = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B$.

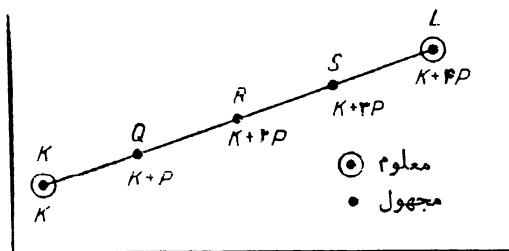
به این ترتیب روشن می‌شود که وسط OC بر وسط AB منطبق است. قضیه ثابت شد!

۱. در حالت کلی هم، می‌توان قضیه را به همین ترتیب ثابت کرد. در این حالت، متوازی الاضلاع را با رئوس‌های K ، $K+A$ ، $K+B$ و $K+A+B$ در نظر می‌گیریم.

تقسیم پاره خط به هر تعداد بخش دلخواه

استدلال بالا را، می توان به سادگی، برای حل مساله های مشابه دیگری هم به کار برد. فرض کنید که می خواهیم رابطه ای برای نقطه S به دست آوریم که روی پاره خط KL و به فاصله $\frac{3}{4}$ تمام پاره خط از نقطه K واقع باشد.

در این حالت، با حرکت از نقطه K و در جهت L ، باید ۴ گام، و هر کدام به طول P ، برداریم تا به L برسیم. بنابراین: $L = K + 4P$ (شکل ۸). در نتیجه: $P = \frac{1}{4}(L - K)$. به همین ترتیب، و به سادگی،



شکل ۸

نقطه های Q ، R و S هم به دست می آیند. مثلاً، در حالت خاص، به دست می آید:

$$S = K + 3P = K + \left(\frac{3}{4}L - \frac{3}{4}K\right) = \frac{1}{4}K + \frac{3}{4}L$$

اگر به جای $\frac{3}{4}$ ، کسر دیگری را هم انتخاب کرده بودیم، می توانستیم

با همین روش، به نتیجه برسیم. به این نکته توجه کنیم که $\frac{3}{4}$ به صورت ضریب

L در می آید و ضریب K برابر $\frac{1}{4}$ می شود که عبارت است از $\left(1 - \frac{3}{4}\right)$.

تمرین

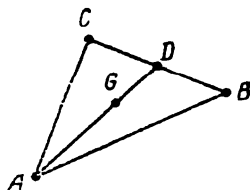
۱. رابطه های نقطه هایی را پیدا کنید که روی پاره خط KL و،

به ترتیب، به فاصله $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ تمامی پاره خط، نسبت به نقطه K قرار دارند. نتیجه کار خود را، با استدلال کامل، همراه کنید (معادله نسبت به P را پیدا و، سپس، حل کنید).

۲. رابطه کلی را برای نقطه ای پیدا کنید که روی خط KL واقع باشد و به فاصله $\frac{m}{n}$ تمامی پاره خط، نسبت به نقطه K ، قرار گیرد.

میانها

این حالت را در نظر می گیریم. سه نقطه A ، B و C داده شده است (شکل ۹)؛ نقطه D ، وسط BC است. مطلوب است رابطه ای برای نقطه



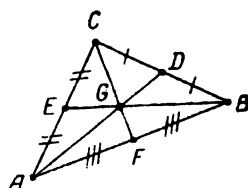
شکل ۹

G که روی پاره خط AD و به فاصله $\frac{2}{3}AD$ از نقطه A واقع باشد. با توجه به نتیجه هایی که به دست آوردیم (به اضافه تمرین ها)، می توانیم با محاسبه ای عادی، تمامی راه حل را به انجام برسانیم. نقطه G ، به فاصله $\frac{2}{3}AD$ از نقطه A قرار دارد، بنابراین: $G = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}D$. یعنی $D = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$. اگر مقدار D را، از عبارت دوم، در عبارت اول قرار دهیم به دست می آید:

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

پاسخ، متقارن است، یعنی نسبت به A ، B و C ، وضعی یکسان

دارد. با وجودی که شرط را برای نقطه A تنظیم کرده بودیم، پاسخ نسبت به A ، B و C ، متقارن از آب درآمد. بنابراین، اگر روی پاره خط BE (E ، وسط AC) هم، نقطه‌ای را به فاصله $\frac{2}{3}BE$ ؛ نسبت به B ، پیدا کنیم، بر همان نقطه G منطبق می‌شود. در مورد نقطه C هم، به همین نتیجه می‌توان رسید. در واقع، همان طور که از شکل ۱۰ دیده می‌شود، نقطه G



شکل ۱۰

روی هریک از میانه‌های AD ، BE و CF قرار دارد و، ضمناً، نقطه ثلث هر کدام از آن‌ها است (یعنی، از هر میانه، یک سوم آن را جدا می‌کند). از مکانیک می‌دانیم که، نقطه G ، گرانیگاه (یا مرکز ثقل) مثلث ABC و یا گرانیگاه جرم‌های برابری است که در نقطه‌های A ، B و C گذاشته باشند.

استدلالی که در این جا، برای اثبات وجود نقطه مشترک پاره‌خط‌های AD ، BE و CF آوردیم، ساده‌تر از هر اثبات دیگری در هندسه اقلیدسی است، البته، به استثنای اثباتی که به کمک قضیه «سدها» انجام می‌گیرد. ولی، در واقع، قضیه سدها هم، خیلی دیر، در هندسه اقلیدسی ظاهر می‌شود. می‌توان توجه کرد که، تمامی کاری که، بر اساس روش خود، انجام دادیم، فوق‌العاده ساده بود، زیرا عمل‌هایی که مورد استفاده قرار دادیم، تنها به جمع و ضرب در عدد مربوط می‌شد. هر قدر هم که این عمل‌ها را تکرار کنیم، هرگز منجر به عبارت مرکب جبری واقعی نمی‌شود. همه جا، با عبارت‌های درجه اول سروکار داریم، عبارت‌هایی که در همان ابتدای جبر، و ضمن انجام تمرین‌هایی از نوع « $4x + 5y + 8z$ » را به « $2x + 3y - z$ » اضافه کنید» یا

« $3z - 4y - 5x$ را در ۷ ضرب کنید»، با آن‌ها برخورد می‌کنیم. این محاسبه‌های جبری را، به سادگی می‌توان، از نظر هندسی، تعبیر کرد. وسیله اصلی ما در این مورد، عبارت بود از این حقیقت (شکل ۵ را ببینید) که: نقطه‌های K ، $K+P$ ، $K+2P$ ، $K+3P$ ، ...، بر یک خط راست و به یک فاصله از یکدیگر، قرار دارند. بنابراین، برای هر سه نقطه U ، V و W (که به زبان «گره‌ها و سگ‌ها» داده شده باشند)، می‌توان مشخص کرد که آیا بر یک خط راست قرار دارند یا نه! اگر بر یک خط راست واقع باشند، آن وقت می‌توان نسبت فاصله UV به فاصله VW را پیدا کرد.

در کتاب «ورودی به ریاضیات»، ناچار شدیم به موجودی تخیلی متوسل شوم که، فاقد هر گونه تجربه عملی و فیزیکی بود. این موجود، هندسه را، تنها بر پایه آگاهی‌های مربوط به حساب درک می‌کرد، زیرا ازدو حس بینائی و لامسه محروم بود. در این جا هم، موجودی را وارد هندسه کرده‌ایم که فاقد هر گونه تجربه هندسی است. روشی را به عنوان پایه کار انتخاب کردیم و، طبق آن، نقطه را به عنوان « x گره و y سگ» و یا به طور ساده (x, y) تعریف کردیم. نتیجه‌های حاصل از این فصل را، به عنوان تعریف، مورد استفاده قرار می‌دهیم. وسط پاره خط AB را به عنوان $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ تعریف

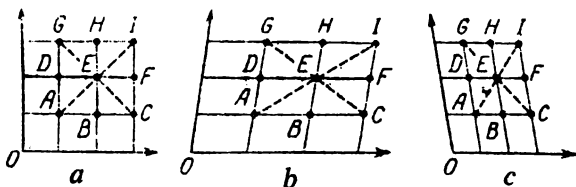
می‌کنیم، همچنین، نقطه‌ای از پاره خط AB را که به فاصله $\frac{3}{4}AB$ از A واقع است، به صورت $\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}B$ و، بالاخره، نقطه‌ای از پاره خط AB را، که آن

را به نسبت $\frac{t}{1-t}$ تقسیم می‌کند، به صورت $(1-t)A + tB$ تعریف می‌کنیم

(t ، مقداری است بین ۰ و ۱). این تعریف‌ها، بر اساس نتیجه تمرین‌های صفحه‌های ۳۸ و ۳۹ به دست می‌آیند.

با تنظیم این داده‌ها، موجود خیالی ما، دارای این قدرت می‌شود که صفحه را، باروش‌های حسابی، مورد مطالعه قرار دهد. اگر از او پرسیم که درباره نقطه‌های A ، B ، C ، D ، E ، F ، G ، H و I چه چیز

قابل توجهی می تواند بگوید، به شرطی که بدانیم: $B=(2,1)$ ، $A=(1,1)$ ، $G=(1,3)$ ، $F=(3,2)$ ، $E=(2,2)$ ، $D=(1,2)$ ، $C=(3,1)$ و $H=(2,3)$ ، آن وقت، او به ما اطلاع می دهد که نقطه B وسط AC ، نقطه D وسط AG ، نقطه H وسط GI ، نقطه F وسط CI و نقطه I ، در عین حال، وسط پاره خط های AI ، DF ، GC و HB است.



شکل ۱۱

برای این که به درستی آن چه گفته شد، قانع شویم، کافی است، نقطه ها را روی صفحه کاغذ شطرنجی وارد کنیم. ولی قضاوتی که «موجود» مورد نظر ما می کند، کاملاً صوری است و خصلت حسابی دارد، زیرا او، نه تنها نمی تواند آن ها را روی کاغذ نشان دهد، بلکه حتی درباره دفتر شطرنجی هم، تصویری ندارد. با وجود این، روش مورد استفاده این موجود فرضی ما، او را قادر می کند تا محاسبه هایی انجام دهد و به استنتاج هایی از هندسه برسد که کاملاً جنبه عقلانی دارد. ولی آیا او می تواند، به یاری این روش، تمامی هندسه اقلیدسی را بسازد؟ کسانی که استدلال ها را، با روش هندسه تحلیلی قبول ندارند، با قاطعیت جواب منفی می دهند، جبراین فصل هم، مقدماتی تر از آن است که بتواند پاسخ گوی این مساله باشد. روش «گره ها - سگ ها»، حتی نمی تواند مفهوم هایی همچون «طول پاره خط» و «خط های راست عمود برهم» را مطرح کند، مفهوم هایی که، در هندسه اقلیدسی، نقشی اساسی به عهده دارند. تا این جا، درهمه شکل هایی که رسم کرده ایم، «محور سگ ها» را عمود بر «محور گره ها» گرفته ایم و هر دو محور را به پاره خط هایی با طول های برابر تقسیم کرده ایم. این، ربطی به ریاضیات نداشت؛ ما به طور ساده و طبیعی، از

کاغذ شطرنجی استفاده کردیم که، معمولاً، همه جا در دسترس ماست. ولی در واقع، چرا سگ‌ها و گربه‌ها «برهم عمودند» و یا «طولی برابر» دارند؟ روی شکل ۱۱، سه تصویر مختلف برای جای نقطه‌های A, B, C, D, E ، F, G, H و I ، به همان نحوی که موجود فرضی به ما اطلاع داده است رسم شده است. در حالت a ، «دو محور سگ‌ها و گربه‌ها» برهم عمودند، ولی در حالت‌های b و c این ویژگی وجود ندارد. در حالت a ، فاصله‌های روی محور گربه‌ها، با فاصله‌های روی محور سگ‌ها طولی برابر دارند، در حالی که در حالت b ، فاصله‌های محور گربه‌ها درازتر و در حالت c کوتاه‌تر از فاصله‌های محور سگ‌ها است. با وجود این، هر سه شکل، به خوبی معرف اطلاعاتی هستند که از جانب موجود فرضی به ما رسیده است. در هر کدام از آنها، B در وسط AC ، E در وسط GC و غیره قرار دارند.

زاویه‌های بدون اندازه

گاهی به اندیشه‌ها و داوریهایی در نظریه‌های ریاضی برخورد می‌کنیم که ما را در موقعیتی دشوار قرار می‌دهند. مثلاً، وقتی که از دو خط راست صحبت می‌کنیم، با هیچ گونه ناراحتی، می‌توانیم در باره اندازه زاویه بین آنها پرسیم. ولی اگر به ما پاسخ داده شود که این زاویه، اندازه‌ای ندارد، به طور طبیعی، متعجب می‌شویم. برای حل این دشواری، دو راه وجود دارد. راه اول را، دیدگاه اصل موضوعی و راه دوم را، مسیر برنامه‌آدلانگن می‌نامیم.

در دیدگاه اصل موضوعی، مبنای کار بر این است که فرض‌های آغازین را در نظر می‌گیرند و سپس، همه نتیجه‌ها را از آنها بیرون می‌آورند. این داده‌های آغازین، همراه با نتیجه‌های ناشی از آنها، مضمون نظریه ریاضی را تشکیل می‌دهند. برای موجود فرضی ما هم، این فرض‌های آغازین وجود دارد که توانسته است به داوریهایی هندسی معینی دست بزند. ولی هیچ کدام از این داوریهایی، این امکان را برای او به وجود نمی‌آورد که بتواند حالت‌های a, b و c را در شکل ۱۱، از هم تشخیص دهد، زیرا همه این حالت‌ها، متناظر با معادله‌های جبری یکسانی هستند. مثلاً، در هر یک از این حالت‌ها، داریم

$A+B=F$ ، $E=2A$ و $B+D=I$. هريك از اين معادله‌ها، كه براي a درست است، براي b و c هم درستي خود را حفظ مي‌كند، باوجودي كه شكل‌هاي آنها، چه از نظر زاويه بين خط‌هاي شبكه شطرنجي و چه از نظر نسبت طول‌هاي AB و AD ، باهم فرق دارند. درواقع، يك نظريه، تنها بر اساس آن آگاهي‌هاي آغازين مي‌تواند دشد كه وجود داشته باشند: و در اين جا، زاويه‌ها و نسبت‌ها، مثل اين است كه اصلاً وجود ندارند.

قبل از اين كه به روش دوم داوري پردازيم، بهتر است اين مطلب را يادآوري كنيم كه، در حالت پاره‌خط‌هاي موازي، موجود فرضي مي‌تواند طول آنها را باهم مقايسه كند. مثلاً، معادله‌هاي $H=D+A$ و $I=A+2A$ (شكل ۱۱)، با توجه به اصطلاح‌هاي قبلي، به اين معنا هستند كه از D به H مي‌توان با گام A رسيد، و از A به I ، با برداشتن دو گام از اين گونه. بر اين اساس، موجود ما، مي‌تواند برآورد كند كه مسافت از A به I ، دو برابر مسافت از D به H است. درواقع، اومواد لازم را براي اثبات اين قضيه هندسه اقليدسي در اختيار دارد كه: پاره خط راست DH ، كه وسط ضلع‌هاي GA و GI از مثلث AGI را به هم وصل كرده است، موازي با قاعده AI و برابر با نصف آن است. ولي، اين موجود، نمي‌تواند طول پاره‌خط‌هاي غير موازي را باهم مقايسه كند. مثلاً، داوري « AD از نصف AC تشكيل شده است»، براي اومعنايي ندارد. درواقع، اين حكم، تنها در حالت a درست است و براي حالت‌هاي b و c صديق نمي‌كند.

برنامه‌آرلانگن

ديدگاه اصل موضوعي، با روشني كامل، موضوع رياضي را معين و تعريف مي‌كند، ولي اين كار را، تا حدي، به طور صوري انجام مي‌دهد. همان‌طور كه ديديم، در روش اصلي موضوعي، چند گزاره به ما مي‌دهند و از ما مي‌خواهند تا نتيجه‌هاي منطقي را از آنها بيرون بكشيم. ضمناً، اين گزاره‌هاي آغازين، به خودي خود نمي‌توانند تخيل ما را برانگيزانند و نمي‌دانيم چگونه به آنها پردازيم. مي‌خواهيم روشي را در اختيار داشته باشيم كه، به كمك آن، بتوانيم آنچه را انجام مي‌دهيم، ببينيم ولي در اين جا

هم، با دشواری برخورد می‌کنیم. اگر به تصویر متوسل شویم، این خطر پیش می‌آید که چیزهای زیادتری را به ما نشان دهد؛ روایتی را نقل کند که در آگاهی اولیه وجود نداشته باشد.

موضوعی را که، موجود فرضی ما، تکامل داد، هندسه آفینی^۱ می‌نامیم. همان‌طور که دیدیم، در هندسه آفینی زاویه قائمه وجود ندارد، و طول‌ها تنها با شرط‌های معینی می‌توانند مقایسه شوند. جهانی که ما را احاطه کرده است، تا حد زیادی، در هندسه اقلیدسی منعکس شده است: زاویه‌های قائمه و طول‌ها را، در همه جا، می‌بینیم. و برای این که مفهوم هندسه آفینی را حس کنیم، باید روشی پیدا کنیم تا ما را از بخشی از آگاهی‌هایی که به وسیله اندام‌های حسی خود به دست آورده‌ایم، آزاد کند.

در این مورد، اشاره اصلی را می‌توان در شکل ۱۱ پیدا کرد. فرض کنید، همین که شکلی شبیه حالت a را روی کاغذی با خانه‌های مربعی رسم کردیم، کسی که از کنار ما رد می‌شود، صفحه کاغذ را چنان کج و معوج کند که مربع‌های صفحه کاغذ به صورت متوازی‌الاضلاع، شبیه حالت b یا c ، در آید. در این میان، بعضی از ویژگی‌های شکل خراب می‌شوند و بقیه بر جای می‌مانند. تنها همان ویژگی‌هایی که، ضمن تحریف شکل، بی‌تغییر باقی می‌مانند، به هندسه آفینی مربوط می‌شوند. می‌توان ثابت کرد که موجود فرضی ما، از همه ویژگی‌هایی که، ضمن این تحریف، «زنده مانده‌اند» آگاه شود و آن‌ها را با زبان جبری که تنظیم کرده است، بیان کند. تحریف‌هایی که، در این موقعیت، مجاز شمرده می‌شود، ترکیبی از عمل‌های زیر است: a) تغییر مقیاس در «محور گره‌ها» (b) تغییر مقیاس در «محور سگ‌ها»؛ c) تغییر جهت محورها. می‌توان تحریف‌های مجاز را، به نحو دیگری هم مشخص کرد

۱. ممکن است شبیه هندسه اقلیدسی — که به وسیله اقلیدس، ریاضی‌دان بزرگ ساخته شده است — کسی گمان کند که هندسه آفینی هم، محصول کار ریاضی‌دانی به نام آفین است. ولی این‌طور نیست. واژه «آفینی» از واژه لاتینی *affinis* [به معنای «مجاور» و «وابسته»] سرچشمه گرفته است که اولر آن را، در سال ۱۷۸۴، وقتی که درباره «تشابه» منحنی‌ها بحث می‌کرد، به معنای *یک‌روش* خاص، به کار برد.

تحریر شکل وقتی مجاز است که، نقطه‌های واقع بر یک خط راست، به نقطه‌های واقع بر خط راست، و خط‌های راست موازی، به خط‌های راست موازی تبدیل شوند. درواقع، هندسه آفینی را، می‌توان برپایه دو مفهوم ساخت: خط راست و توازی.

از دیدگاه اصل موضوعی، فرض‌های آغازین ما منجر به هندسه آفینی می‌شوند؛ ضمناً این فرض‌های آغازین، بخشی از همان فرض‌های آغازینی هستند که هندسه اقلیدسی را می‌سازند. به این ترتیب، هر قضیه‌ای را که بتوان در هندسه آفینی ثابت کرد، باید یکی از قضیه‌های هندسه اقلیدسی هم باشد. ولی البته، هر قضیه‌ای از هندسه اقلیدسی، لازم نیست در هندسه آفینی هم وجود داشته باشد.

هندسه آفینی از هندسه اقلیدسی، به مراتب ساده‌تر است، به همین دلیل، اگر قضیه‌ای در هندسه آفینی هم وجود داشته باشد، بهتر است آن را باروش‌های آفینی ثابت کنیم، زیرا، این روش‌ها، پیچیدگی و تفصیل کمتری دارند. اگر تحریرهایی را که در بالا نام بردیم، در نظر داشته باشیم، می‌توانیم خیلی زود مشخص کنیم که، آیا قضیه‌ای به هندسه آفینی تعلق دارد یا نه! هر قضیه‌ای که بعد از هر یک از تحریرهای مجاز شکل، درستی خود را از دست ندهد، قضیه‌ای از هندسه آفینی است. یادآوری می‌کنیم که، همه قضیه‌های این فصل از عهده چنین آزمایشی برمی‌آیند، زیرا آن‌ها را به کمک جبر «گره‌ها-سگ‌ها» ثابت کرده‌ایم.

در سده نوزدهم، هندسه‌های مختلفی پدید آمد و هر کدام، به طور جداگانه، راهی برای تکامل مستقل خود پیدا کردند؛ هندسه اقلیدسی، هندسه آفینی، هندسه تصویری، هندسه انعکاسی، هندسه‌های نااقلیدسی بایا-لوباچوسکی و دیمان. به این ترتیب، حتی در سده نوزدهم، مواد زیادی برای بررسی هندسه‌های مختلف جمع شده بود. اساس طبقه‌بندی هندسه‌ها، بر نظامی استوار است که فلیکسی کلاین در طرح معروف خود، که به برنامه ارلانگن شهرت دارد، تنظیم کرده است. او این برنامه را، در سال ۱۸۷۲، وقتی که استاد دانشگاه ارلانگن بود، ضمن درس‌های خود، مطرح کرد. بنابراین از اندیشه‌های اساسی کلاین (که درواقع، با اندکی تفاوت،

دردرس‌های خود طرح کرده بود)، نوع هندسه شمارا، به وسیله تبدیل‌هایی تعریف می‌کند که شما می‌توانید آن‌ها را روی تصویرها و شکل‌ها انجام دهید. به این مفهوم، جغرافیا را می‌توان در بین همه هندسه‌ها، از جمله محدودترین آن‌ها دانست، زیرا اگر بخواهید حقیقت گزاره‌ها را خراب نکنید، نمی‌توانید فاصله‌ها و جهت‌ها را در آن تغییر دهید.

در هندسه اقلیدسی، می‌توانید کمتر خرده گیر باشید. اگر مثلاً شکل مورد نظر شمارا، که معرف يك ویژگی است، با مقیاس دیگری چاپ کنند، یا آن را در جای دیگری از صفحه قرار دهند، یا به اندازه زاویه‌ای بچرخانند و یا، بالاخره، به جای خود شکل، تصویر آینه‌ای آن را چاپ کنند، در کار شما هیچ گونه اختلال جدی پیدا نمی‌شود. در هر کدام از این حالت‌ها، می‌توانید ویژگی مورد نظر خود را، به درستی نشان دهید. توجه کنیم که همه این گونه تبدیل‌ها را، در هندسه آفینی هم می‌توانید انجام دهید، علاوه بر آن، همان‌طور که دیدیم، بعضی انحراف‌ها و کج و معوجی‌ها را هم می‌توانیم، در این جا، مجاز بدانیم^۱. در هندسه تصویری، آزادی بیشتری برای «تعریف» داریم: مثلاً می‌توانیم به جای شکل، عکسی از آن را قرار دهیم که تحت زاویه غیر قائم گرفته شده است. سرانجام، در توپولوژی (مکان شناسی)، کمتر از هر جای دیگری، با محدودیت مواجه هستیم (توپولوژی را، در زمان کلاین، به لاتینی *analysis situs* - هندسه مکان - می‌نامیدند). در توپولوژی می‌توانیم شکل را، به هر اندازه که بخواهیم، کش بدهیم و یا آن را مچاله کنیم، تنها چیزی که حق نداریم، پاره کردن آن است. ویژگی‌های شکل، از نظر توپولوژی، با این تبدیل‌ها خراب نمی‌شوند. مثلاً شما نمی‌توانید در توپولوژی، مثلث و مربع و دایره را از هم تمیز دهید، زیرا روی يك نوار کشسان، می‌توانید هر کدام از آن‌ها را، به صورت دیگری

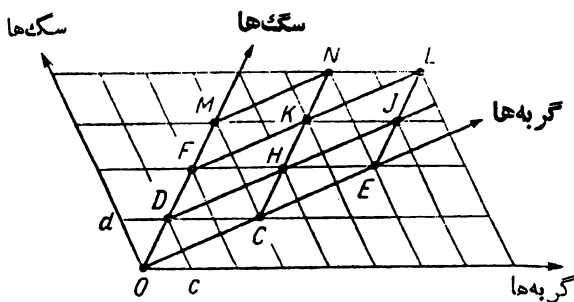
۱. در جبر «گره‌ها - سگه‌ها»، نقطه O به جای «هیچ» گرفته شده است و جای خاصی را اشغال می‌کند؛ نمی‌توانیم جای مبدا O را عوض کنیم. بنابراین، می‌توان گفت که، این جبر، متناظر با هندسه آفینی محدودتری است (زیرادر آن، انتقال‌های به موازی خود، مجاز نیست).

هدف ما، اين نيست كه «برنامه ارلانگن» را، تا عمق، بشكافيم. تنها مي‌خواستيم از دو روشي كه، براي شرح موضوعي مثل هندسه آفيني وجود دارد، ياد كنيم: يكي از اين روش‌ها، جنبه منطقي دارد و به كمك اصل موضوع‌ها ساخته مي‌شود، و ديگري، تصويري و عيني است. در روش عيني، مي‌توان هندسه آفيني را از هندسه اقليدسي به دست آورد، به شرطي كه اجازه داشته باشيم آن را «تحريف» كنيم و ويژگي‌هاي نامناسب شكل را كه به كارما ربطي ندارند، از آن جدا كنيم. روش اخير به ما امكان مي‌دهد تا از شكل‌ها با خيالي آسوده استفاده كنيم، و از ورود پنهاني و غير قانوني آگاهي‌هاي ناسازگار با اصل موضوع‌ها، به ذهن خود، هراسي نداشته باشيم.

تغيير محورها

ديديم كه شرط عمود بودن محورها، در كاغذ شطرنجي، به هيچ وجه، امري ضروري نيست: هر دو خط دلخواه متقاطع را، مي‌توان به عنوان محورها در نظر گرفت. اگر فرض كنيم، دو نفر، كاغذهاي خود را با شبكه‌اي از متوازي‌الاضلاع‌ها، متناظر با كاغذ شطرنجي، پر کرده باشند، آن وقت، آنها مي‌توانند دستگاه‌هاي به كلي متفاوتي را انتخاب كنند. آيا دشوار است، داده‌هاي يك دستگاه را به صورتی بنويسيم كه براي دستگاه ديگر هم قابل فهم باشد؟ ممكن است، اين امر، در ابتدا دشوار به نظر برسد. ولي در واقع، مسأله را مي‌توان، به سادگي و به كمك جبر مقدماتي، حل كرد.

در شكل ۱۲، دو دستگاه داده شده است. محورهاي يكي از دستگاه‌ها



شكل ۱۲

را با واژه‌های «گر به‌ها» و «سگ‌ها» مشخص کرده‌ایم. در این دستگاه، هر نقطه به عنوان « x گر به» و « y سگ» و یا، به طور ساده، $xc + yd$ ، معین می‌شود. محورهای دستگاه دیگر را، با واژه‌های «گر به‌ها» و «سگ‌ها» نشان داده‌ایم و هر نقطه به عنوان « x گر به» و « y سگ»، یا به طور ساده $XC + YD$ معین می‌شود. حرف‌های کوچک مربوط به دستگاه اول، در دستگاه دوم با حرف‌های بزرگ نوشته شده‌اند. اگرچه، این وضع، در مورد دستگاه اول، کاملاً صدق نمی‌کند، زیرا نقطه‌های صفحه، که می‌توانند متعلق به هر یک از دو دستگاه باشند، با حرف‌های بزرگ $C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N$ نوشته شده‌اند.

نقطه	ثبت آن در دستگاه اول	ثبت آن در دستگاه دوم
C	$3c + d$	C
E	$6c + 2d$	$2C$
D	$c + d$	D
F	$2c + 2d$	$2D$
M	$3c + 3d$	$3D$
H	$4c + 2d$	$C + D$
J	$7c + 3d$	$2C + D$

با مقایسه نام گذاری‌های جدول، توجه می‌کنیم که: نقطه D متناظر است با $c + d$ ؛ $2D$ متناظر است با $2c + 2d$ ، یعنی از لحاظ مقدار دو برابر؛ $3D$ متناظر است با $3c + 3d$. اگر این نتیجه‌ها تصادفی نباشند، می‌توانیم معادل نقطه‌های $4D$ ، $5D$ ، $6D$ ، و غیره را، بدون این که به کاغذ شرط‌نچی مراجعه شود، پیدا کنیم. مثلاً، $6D$ باید متناظر با $6c + 6d$

۱. در اینجا، مولف، از جبر شفاهی، برای نام‌گذاری محورها استفاده می‌کند. یعنی «محور گر به‌ها» و «محور سگ‌ها» را، به ترتیب، با حرف اول واژه‌های انکلیسی cat (گر به) و dog (سگ)، نام‌گذاری می‌کند (یادداشت مترجم).

باشد. همین حقیقت را، در مورد نقطه‌های C و $2C$ هم مشاهده می‌کنیم. در واقع، به کمک شکل پی‌می‌بریم که: اگر D را با $c+d$ عوض کنیم، آن وقت $2D$ با $2c+2d$ و $3D$ با $3c+3d$ و غیره، عوض می‌شود. ولسی، اگر به‌طور هم‌زمان C و D را در نظر بگیریم، چگونه می‌توان از این اندیشه استفاده کرد؟ چون C با $c+d$ و D با $c+d$ عوض شده است، بنابراین باید انتظار داشت که $C+D$ با مجموع $4c+2d$ عوض شود. در واقع هم، همین وضع پیش آمده است. همه آن‌چه که در جدول آمده است (تا نقطه j)، کاملاً با این روش محاسبه، سازگارند.

این نتیجه‌گیری‌ها، با تعبیر هندسی‌ما از جمع و ضرب، تطبیق می‌کنند. نقطه $4C+5D$ را در نظر می‌گیریم که، با برداشتن ۴ گام C ، از مبدا، و سپس ۵ گام D ، به آن رسیده‌ایم. نقطه C در دستگاه اول به صورت $3c+d$ بیان می‌شود، بنابراین، ۴ گام C متناظر با $12c+4d$ می‌باشد؛ به‌همین ترتیب، چون نقطه D به صورت $c+d$ بیان می‌شود، بنابراین، ۵ گام D به معنای $5c+5d$ است؛ و در نتیجه، به دست می‌آید:

$$17c+9d$$

از نظر جبری، محاسبه $4C+5D$ ، منجر به تبدیل ساده $C=3c+d$ و $D=c+d$ می‌شود. بنابراین

$$4C+5D=4(3c+d)+5(c+d)=17c+9d$$

همه آن‌چه را که درباره $4C+5D$ انجام دادیم، می‌توان درباره هر نقطه $XC+YD$ به کار برد که، در نتیجه، به دست می‌آید:

$$XC+YD=X(3c+d)+Y(c+d)=(3X+Y)c+(X+Y)d$$

اگر این نقطه، در دستگاه اول و به صورت $xc+yd$ بیان شود، باید داشته باشیم:

$$x=3X+Y \quad (1)$$

$$y=X+Y \quad (2)$$

که قاعده انتقال از نقطه به مختصات (X,Y) در دستگاه دوم را، به مختصات

(x, y) آن در دستگاه اول، به ما می دهد.

ممکن است، عکس این عمل لازم باشد: با در دست داشتن (x, y) ، می خواهیم (X, Y) را به دست آوریم. برای این منظور، کافی است، معادله های (۱) و (۲) را، نسبت به X و Y ، حل کنیم. در نتیجه، به دست می آوریم:

$$X = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y \quad (3)$$

$$Y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y \quad (4)$$

اکنون دیگر در موقعیتی هستیم که می توانیم گزاره ها را از زبان يك دستگاه به زبان دستگاه دیگر ترجمه کنیم. کاری که اغلب ضرورت پیدا می کند. پیش می آید که، حل مسأله را در وضعی از محورها آغاز می کنیم، در جریان حل متوجه می شویم که اگر وضع محورها به صورت دیگری باشد، کار محاسبه و استدلال خیلی ساده تر می شود و، به همین مناسبت، محورها را تغییر می دهیم. از این تغییر، مثلاً در حل مسأله های مکانیک، در آغاز فصل چهارم، استفاده خواهیم کرد.

بعضی از کتاب های قدیمی مربوط به هندسه تحلیلی، این تأثیر را به وجود آورده اند که، کار با دستگاه های غیر قائم، یعنی دستگاه هایی که محورهای آن برهم عمود نباشند، خیلی دشوار است. در این کتاب ها، همیشه کار را با محورهای عمود برهم آغاز می کنند و، اگر به دستگاهی غیر قائم برخورد کنند، مثلثات را به خدمت می گیرند. ولی ما توانستیم، در شکل ۱۲، با وجودی که هر دو دستگاه غیر قائم اند، بدون به یاد آوردن مثلثات، از يك دستگاه به دستگاه دیگر برویم. ضمناً، جز عبارت های خطی و عمل دستگاه های شامل دو معادله خطی، از هیچ چیز دیگری استفاده نکردیم.

تعمیم

در این فصل، کار خود را از بررسی گروه هایی از گره ها و سگ ها آغاز کردیم. به طور طبیعی، این پرسش پیش می آید که، چرا خود را به دو نوع

جانور محدود کردیم؟ آیامی توان سه، چهار، پنج نوع ویا، به طور کلی، تعداد دلخواهی از نوع های مختلف جانوران را در نظر گرفت؟ ابتدا بعضی عمل های حسابی یا جبری انجام دادیم و، سپس، تفسیرهایی استعاری برای آن ها پیدا کردیم.

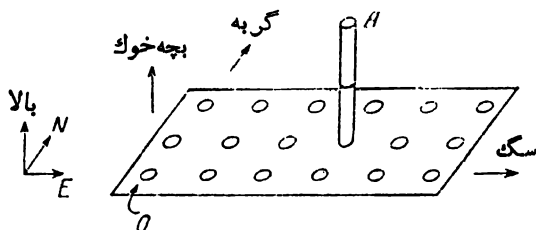
روشن است که، با اضافه شدن نوع های جانوران، تفاوت های زیادی در جبر پدید نمی آید. اضافه کردن ۵ گربه، ۶ سگ و ۷ بچه خوک به ۲ گربه، ۳ سگ و ۴ بچه خوک، نه یک مسأله تازه است و نه خصیلت های جدی تازه ای دارد. ولی، وقتی که به هندسه برویم و بخواهیم صورتی عینی و قابل تصور به مساله بدهیم، وضع دیگری پیش می آید. در حالتی که با سه نوع جانور سروکار داریم، $n = 3$ ، هنوز می توانیم موفقیت موجود را به طور عینی نشان دهیم: به فضای سه بعدی می رویم و، مثلاً، «محور گربه ها» را به سمت خاور، «محور سگ ها» را به سمت شمال و «محور بچه خوک ها» را به سمت بالا می گیریم. ولی، برای $n = 4$ ، تمام تلاش ما برای نشان دادن موقعیت مفروض به وسیله نمودار، مواجه با عدم موفقیت می شود. موضوع این است که، فضای فیزیکی که در آن زندگی می کنیم، سه بعدی است و برای نشان دادن ترکیبی که شامل بیش از سه نوع جانور است، مناسب نیست. به چه ترتیب، می توان موقعیت خود را، در حالت $n \geq 4$ ، معین کرد: به طور ساده به وسیله جبر و بدون در نظر گرفتن مدل فیزیکی آن؟ پیش از آن که به این پرسش پاسخ بدهیم، طرح فیزیکی را، برای حالت $n = 3$ ، بررسی می کنیم.

کاغذ سه بعدی با خانه های شطرنجی

بسیاری از ما، تصویری نارسانا از فضا داریم. شاید به همین دلیل است که به هندسه مختصاتی در فضا، احترام زیادی می گذاریم و، در برنامه های ریاضی، آن را در مرحله هایی بالاتر و زمانی دورتر قرار داده ایم. و چه بد! مادر فضایی سه بعدی زندگی می کنیم: بیشتر چیزهایی که می سازیم یا مورد استفاده قرار می دهیم، مثل هواپیما یا اتومبیل، دارای سه بعدند و نمی توان آن ها را، همچون نقش قالی و طرح چاپ، روی صفحه پهن کرد. استفاده از مدل واقعی، می تواند آموزش مختصات سه بعدی را، تا حد زیادی، ساده و آن را، برای دانش آموزان

نوجوان قابل فهم کند. ساختن چنین مدلی دشوار نیست. آن چه «کاغذ سه بعدی شطرنجی» نام گذاشته ایم، عبارت از وسیله ای است که، به کمک آن، می توان فاصله را در هر جهتی - به طرف خاور، به طرف شمال و به طرف بالا- اندازه گرفت. این وسیله را، روی شکل ۱۳ نشان داده ایم و عبارت است از تخته ای چوبی که دارای سوراخ هایی است و در این سوراخ ها، می توان میخ های چوبی گردی را، به طور قائم، قرارداد. نقطه A (شکل ۱۳)، نسبت به نقطه O ، در ۳ سانتی متری به طرف خاور، ۱ سانتی متری به طرف شمال و ۲ سانتی متری به طرف بالا، قرارداد. این نقطه، نماینده ۳ گره، ۱ سک و ۲ بچه خوک، و یا به طور ساده $2p + 1d + 3c$ ، می باشد. در هندسه مختصاتی، این نقطه را به صورت $(3, 1, 2)$ نشان می دهند.

برای این که، در عمل، از این وسیله استفاده کنیم، باید بعضی تغییرها را در آن بدهیم. برای این که میخ ها پایدارتر باشند، باید تخته را ضخیم تر گرفت. یامی توان دو تخته نازک یکسان را با سوراخ های دو طرفه آماده و، سپس، طوری به یکدیگر محکم کرد که بین آنها، فاصله ای وجود داشته باشد. در این صورت، میخ ها، باز هم محکم تر خواهند شد. با وجود این، بهتر است این خرده کاری ها را به عهده سازنده مدل بگذاریم تا به نحوی که صلاح می داند، آن را آماده کند.



شکل ۱۳

فضای سه بعدی را، درست شبیه فضای دوبعدی، در نظر می گیریم. نتیجه جمع را، چگونه می توان روی مدل مشاهده کرد؟ اگر داشته باشیم $R = 3P$ ، چه رابطه ای بین R و P وجود دارد؟ اگر یک گام P را، مرتباً تکرار کنیم، به چه نتیجه ای می رسیم؟ خود دانش آموزان می توانند، مستقلاً و با آزمایش روی تخته های خود، به همه این پرسش ها پاسخ بدهند و، احتمالاً،

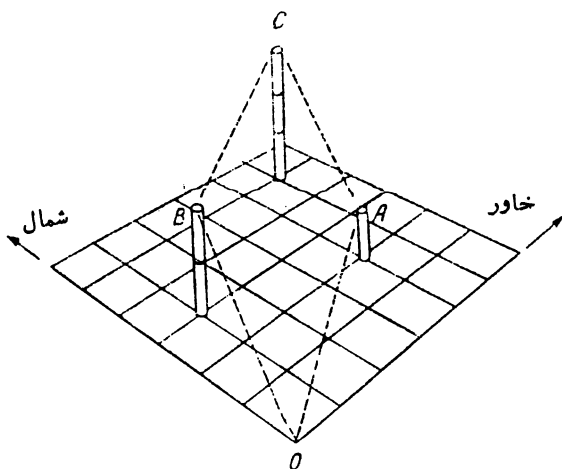
از این کار خود، لذت هم ببرند. پاسخ‌های آن‌ها، کاملاً شبیه نتیجه‌هایی خواهد بود که قبلاً به دست آورده‌ایم. در این جا، خلاصه این نتیجه‌گیری‌ها را می‌آوریم.

تناظر جمع با قانون متوازی‌الاضلاع. روی شکل ۱۴، جمع $C = A + B$ نشان داده شده است:

$$A = 2c + 2d + p +$$

$$B = c + 3d + 2p$$

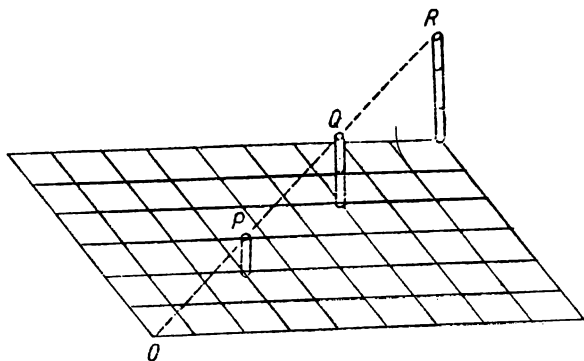
$$C = 5c + 5d + 3p$$



شکل ۱۴

نقطه‌های O ، A ، B و C ، روی یک صفحه قرار دارند و راس‌های یک متوازی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهند، اگرچه، این وضع را، نمی‌توان به سادگی روی شکل نشان داد. می‌توان از مقوا، متوازی‌الاضلاعی برید و آن را در وضعی قرار داد که، روی شکل، با خط چین نشان داده شده است. با آزمایش‌های بعدی، می‌توان تحقیق کرد که نتیجه حاصل، بستگی به انتخاب A و B ندارد. اثر ضرب. روی شکل ۱۵، رابطه $R = 3P$ نشان داده است، که در آن داریم: $P = 3c + 2d + p$ و $R = 9c + 6d + 3p$. مثل حالت دو بعدی،

در این جا هم متوجه می شویم که، نقطه های O و P و R روی یک خط راست
 وقع اند و فاصله نقطه R از O ، سه برابر فاصله P از O است.



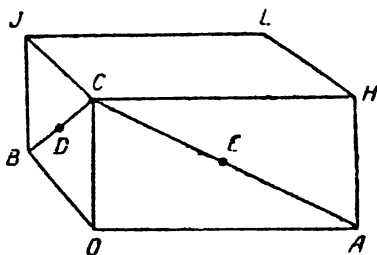
شکل ۱۵

گام های یکنواخت. اگر در همین شکل، علاوه بر نقطه های O ، P و R ،
 نقطه $Q = 2P = 6c + 4d + 2p$ را هم در نظر بگیریم، آن وقت، گروه
 نقطه های O ، P ، Q و R ، معرف اضافه شدن متوالی P خواهند بود. این
 نقطه ها، روی یک خط راست واقع اند و به فاصله های مساوی از یکدیگر، قرار
 دارند. در این جا هم، همان نوع تقسیم خط راست، به کمک گام ها، پدیدار
 شد. تنها تفاوتی که دارد، در این جا، مثل این است که از تپه ای و یا پشت بام
 شیب داری، بالامی روییم.

این نتیجه گیری اهمیت زیادی برای ما دارد، زیرا به کمک گام ها،
 به رابطه هایی می رسیم که نقطه وسط و یا نقطه ای که پاره خط را به نسبتی
 دلخواه تقسیم کرده است، به ما می دهند. این رابطه ها، بدون هیچ تفاوتی،
 برای فضای سه بعدی هم، درست اند. مثلاً، اگر A ، B و C ، سه نقطه دلخواه
 از فضا باشند، برای نقطه G ، محل برخورد میانه های مثلث ABC ، همان

$$\text{رابطه } G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C \text{، به قوت خود باقی خواهد بود.}$$

روی شکل ۱۶، قالبی نشان داده شده است که راس آن در نقطه O
 قرار گرفته است. چون D و E ، وسط ضلع های BC و CA هستند، بنابراین،



شکل ۱۶

AD و BE - میانه‌های مثلث ACB - در نقطه G ، جایی در درون قالب به هم می‌رسند.

چون وجه $OBJC$ از قالب، متوازی الاضلاع (و درواقع، مستطیل) است، پس $J = B + C$. اگر از J ، گام A را برداریم، به نقطه L می‌رسیم، بنابراین $L = A + J = A + B + C$. اگر آن‌چه را که برای G و L به دست آورده‌ایم، باهم مقایسه کنیم، معلوم می‌شود که L درست برابر با سه G است: $L = 3G$. یعنی G روی قطر OL قرار دارد و $\frac{1}{3}$ آن را جدا می‌کند. ولی نقطه G ، روی صفحه مثلث ABC قرار دارد، بنابراین، صفحه ABC ، در همین نقطه، خط راست OL را قطع می‌کند. به این نتیجه می‌رسیم: صفحه ABC ، خط راست OL را در نقطه G ، که فاصله آن از O برابر $\frac{1}{3} OL$ است، قطع می‌کند و، ضمناً، میانه‌های مثلث ABC هم، در همین نقطه به هم می‌رسند. و ما توانستیم، این نتیجه کاملاً جدی را، با امکان‌های ساده حساب، ثابت کنیم.

این نتیجه را، به خصوص، برای «قالب» به دست آوردیم، زیرا قالب شیء منظمی است که به سادگی قابل توصیف است. در این‌جا، از اصطلاح بی‌تناسب «متوازی السطوح قائم» یا «مکعب مستطیل» استفاده نکردیم. با وجود این، همه چیزهایی که درباره جبر و «تحریف‌های» مجاز در هندسه آفینی از قبل می‌دانیم، در این‌جا هم به قوت خود باقی است. اثباتی که آوردیم، در هیچ مرحله‌ای، ارتباطی به قائم بودن زاویه‌های قالب ندارد. به این ترتیب

همین اثبات را می‌توان درحالتی هم به کاربرد که قالب تغییر شکل داده باشد و وجه‌های آن، به جای مستطیل، متوازی‌الاضلاع باشند.

همین نکته، دربارهٔ کاغذ سه بعدی شطرنجی ما هم درست است. به هیچ وجه مهم نیست که محورها، به سمت‌های خاور، به شمال و بالا امتداد داشته باشند و یا درست‌های دیگری. تنها علتی که موجب انتخاب جهت‌های عمود برهم شده است، خصلت عملی تربودن آن است. درست کردن تخته‌ای که سوراخ‌های آن تشکیل یک متوازی‌الاضلاع دهند و، ضمناً، امتداد هر سوراخ نسبت به تخته قائم نباشد، کار راحتی نیست. بسیاری از مردم، در بارهٔ شکل‌های سه بعدی، تصویری دارند که، به طور ساده، به قالب‌های با زاویه‌های قائم مربوط می‌شوند. و این، شاید به این مناسبت باشد که در زندگی، و از همان دوران کودکی، دائماً با این گونه قالب‌های مکعب مستطیلی سروکار داشته‌ایم. ولی علت استفاده از محوره‌های عمود برهم هرچه باشد - کارهای عملی یا علت‌های روانی - نباید فراموش کنیم که، در ریاضیات این فصل، نه تنها نیازی به استفاده از زاویه‌های قائمه نداریم، بلکه حتی وجود آن را هم، مفروض نمی‌گیریم.

از همهٔ آن چه گفتیم، تصویری کلی به وجود می‌آید که موضوع یکی از شاخه‌های ریاضیات جدید را تشکیل می‌دهد. اگر شیب فضای دو بعدی استدلال و داور می‌کنیم، در فضای سه بعدی هم، همان رابطه‌ها را به دست می‌آوریم. و این، ما را به این اندیشه می‌رساند که: آیا نمی‌شود روشی برای به دست آوردن و تکامل این نتیجه‌ها پیدا کرد، بدون این که به خاطر بیاوریم که در چه فضایی با چند بعد قرار گرفته‌ایم؟ در این صورت، به نظریه‌ای دست می‌یابیم که، برای هر تعداد بعد، قابل قبول خواهد بود. این نظریه، ما را از تکرار اثبات‌ها، برای فضای دو یا سه بعدی، نجات می‌دهد و حجم کار را تا نصف پایین می‌آورد. و اگر به این راه بیفتیم، امکان پیدا خواهیم کرد که فضاهای چهار و پنج و شش بعدی، و به طور کلی فضای n بعدی، را مورد بررسی قرار دهیم که، در واقع، صرفه جویی در وقت و اندیشه را به منتها درجهٔ خود خواهد رسانید.

فضایی که چهار و یا بیشتر بُعد دارد

آیا صحبت کردن درباره فضای n بُعدی، وقتی که n بزرگتر از ۳ باشد، قانونی و مجاز است؟ می‌دانیم که تجربه عملی، ما را با هندسه خط راست (یک بُعد)، هندسه صفحه (دو بُعد) و هندسه فضا (سه بُعد) آشنا می‌کند، ولی هیچ وسیله‌ای در اختیار ما نمی‌گذارد که بتوانیم چهاربعد را، به طور عینی، به تصور آوریم. خود اندیشه فضای چهاربعدی، به چه معنا است؟

قبل از همه، موافقت کنیم، مساله را خارج از عمل، مورد بررسی قرار دهیم. در این جا، هیچ اشاره‌ای به نظریه نسبیت نمی‌کنیم و به این بحث هم نمی‌پردازیم که آیا زمان را می‌توان در واقع، به مفهومی، بعد چهارم به حساب آورد. برای ما فعلاً فرق نمی‌کند که در چه جهانی هستیم: در جهان سه بُعدی خود، و یا در جهان دیگری که مثلاً، می‌توان تجربه زندگی در ۶ بعد را، در آن، آزمایش کرد. ما تنها به ماهیت ریاضی این اندیشه علاقه‌مندیم و می‌خواهیم بدانیم که، آیا می‌شود به کمک فضای n بُعدی به نتیجه‌های ذهنی درستی رسید، زیرا اندیشه فضای n بُعدی، در همین دنیای ناسوتی کاربرد دارد (مثلاً، در آمار) و برای ما مهم است بدانیم که، آیا می‌شود به نتیجه‌های حاصل از آن اعتماد کرد.

جنبه جبری مساله، ظاهراً، روشن است و احتمال نمی‌رود به دشواری برخورد کند. اگر کسی بخواهد درباره گله‌ای از جانوران مختلف مطالعه کند و عمل‌های جمع و ضرب را درباره آن‌ها انجام دهد، هیچ چیز نمی‌تواند مانع او شود که به هر تعداد دلخواه که مایل باشد، گونه‌های مختلف جانوران را انتخاب کند.

سپس، نوعی تناظر، بین عمل‌های روی دو یا سه جانور، از یک طرف و موضوع‌های مسطحه و فضائی، از طرف دیگر، برقرار کردیم. ما توانستیم به موجود خیالی خود یاد بدهیم که نتیجه‌گیری‌های جبری خود را (مثلاً، $A+B=C$)، به زبان هندسی ترجمه کند: $OACB$ متوازی‌الاضلاع است. ولی این ترجمه یا تفسیر به زبان هندسی، برای او، چه نتیجه‌ای دارد؟ مطلقاً هیچ. مگر نه این است که او، هرگز با شکل‌های هندسی برخوردی نداشته است و تصوری هم درباره آن‌ها ندارد. واژه «متوازی‌الاضلاع» برای

او بی معنی است و خود تمرین هم تهی و بدون مضمون است. ولی، اگر موجود فرضی را کنار بگذاریم، این ترجمه، برای ما سودمند است. ما از لحظه تولد، دردنیای فیزیکی خود زندگی کرده ایم، دائماً ناظر شکل ها و حرکتهای اشیاء بوده ایم و مغز ما از ترکیب هایی پر شده است که، در واقع، چیزی جز همان زبان هندسی نیست. ترجمه از زبان جبری به زبان هندسی، برای ما، دو امتیاز دارد. از یک طرف به ما امکان می دهد، از روش دقیق جبری، برای به دست آوردن نتیجه هایی از هندسه استفاده کنیم که، از دید تصورات عینی ما، پنهان مانده اند (مثل، خاصیتی از قالب که قبلاً ثابت کردیم). از طرف دیگر، این امکان را به ما می دهد که نتیجه های صوری جبری را، به صورتی عینی - روی تصویر و شکل، مجسم کنیم. این تصاویر، جان تازه ای به معادله های جبری می دهند، روشنی بیشتری به آنها می بخشند و درک بسیاری از نتیجه گیری ها را، به خصوص اگر با حقیقت های هندسی واضحی مربوط باشند، بی اندازه ساده می کنند. از این گذشته، طرح عینی کار، که به درک بهتر جبر کمک می کند، منجر به کشف نتیجه هایی می شود، که بدون آن، به احتمال زیاد به آنها نمی رسیدیم.

به خصوص برای بررسی مساله هایی که به مفهوم تغییر محورها مربوط می شوند، دیدگاه هندسی می تواند کمک خوبی باشد. فرض کنید، ضمن کار در یک دستگاه مختصات، به نتیجه های معینی رسیده باشیم. بعد، ضرورت تغییر دستگاه پیش می آید. آیا می توان از همه نتیجه های حاصل استفاده کرد، یا باید دوباره آنها را مورد تحقیق قرارداد؟ پاسخ به این پرسش، بستگی به طبیعت نتیجه گیری ها دارد. اگر این نتیجه ها، معرف گزاره هایی باشند که به آنها، حقیقت های هندسی می گوئیم، آن وقت، می توان اطمینان داشت که، در دستگاه تازه هم، به قوت خود باقی هستند و دچار تغییر نمی شوند. ولی، در حالت های دیگر، ممکن است چنین نباشد. مثلاً، اگر ثابت کرده باشیم که نقطه ای، بین دو نقطه دیگر و به یک فاصله از آنها قرار گرفته است، می توانیم مطمئن باشیم که تغییر محورها، تأثیری در این حقیقت ندارد. ولی اگر بحث بر سر تعبیر هندسی معادله ای در بین نباشد، کاملاً ممکن است که، در دستگاه تازه، صحت خود را از دست بدهد.

به عنوان مثال، نقطه‌های F ، H و E از شکل ۱۲ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم، کار را از کاغذ شطرنجی آغاز کرده باشیم که باخطهای کلفت‌تر مشخص شده است. چون $F=2D$ ، $H=C+D$ و $E=2C$ ، پس $H=\frac{1}{2}E+\frac{1}{2}F$ ، یعنی H وسط EF است. اکنون، اگر به جای شبکه

خطهای کلفت، شبکه‌های نازک را در نظر بگیریم، به این حقیقت هندسی لطمه‌ای وارد نمی‌شود. در این دستگاه داریم: $F=2c+2d$ ، $H=2c+2d$ و $E=6c+2d$ و، از آن‌جا، همان‌طور که انتظار داشتیم، به دست می‌آید:

$H=\frac{1}{2}E+\frac{1}{2}F$. به عنوان مثال مخالف، مختصات نقطه $F(0,2)$ را با مختصات نقطه $E(2,0)$ در دستگاه باخطهای کلفت - باهم مقایسه می‌کنیم. می‌بینیم که، مختصات این دو نقطه، تنها در ردیف خود باهم تفاوت دارند، ولی اگر به دستگاه دیگر برویم؛ دیگر این «جابه‌جایی» را در مختصات دو نقطه نمی‌بینیم: $F(2,2)$ ، $E(6,2)$. در واقع، رابطه‌ای که بین مختصات این دو نقطه وجود داشت، امری تصادفی و متکی به نوع انتخاب محورها بود و، بنابراین، با تغییر محورها، درستی خود را از دست داد.

مساله‌هایی وجود دارند که ما را به مطالعه فضای چهاربعدی می‌کشانند. در جبر مقدماتی، نمودار تابع $y=x^2$ به ما کمک می‌کند تا از ویژگی‌های خود معادله سردر آوریم. البته، این نمودار در صفحه، یعنی فضای دوبعدی، قرار دارد، زیرا معادله آن، شامل دو متغیر x و y است. بعدتر، به عددهای مختلط برمی‌خوریم که شامل $i=\sqrt{-1}$ هستند. اگر w و z را دو عدد مختلط فرض کنیم: $z=x+iy$ و $w=u+iv$ ، آن وقت، معادله $w=z^2$ شامل چهار عدد x ، y ، u و v است و، برای نمودار آن، به یک فضای چهار بعدی نیاز داریم. اگر در یک فضای چهاربعدی زندگی می‌کردیم و می‌توانستیم چنین نموداری را رسم کنیم، مطالعه عددهای مختلط، بی‌اندازه ساده می‌شد. ولی، حالا که در موقعیتی نیستیم که بتوانیم این گونه نمودارها را مشاهده کنیم، باید در تلاش پیدا کردن روش‌هایی برای درک آن‌ها باشیم.

به این دلیل، وهم به دلیل‌های بسیار دیگری، می‌خواهیم روشی

هندسی ابداع کنیم تا، به کمک آن، بتوانیم موقعیت‌هایی را که با چهار عدد و بیشتر سروکار دارند، مورد تفسیر قرار دهیم. حالا، در واقع، خود مادر موقعیت آن موجود خیالی قرار می‌گیریم و تلاش می‌کنیم قاعده‌های معینی را، برای ترجمه گزاره‌های جبری به زبان هندسی، یعنی به گزاره‌های هندسی، جست‌وجو کنیم. با همه این‌ها، امتیازی چون و چرایی بر موجود فرضی داریم: فضای یک، دو و سه بعدی را، به صورت عینی، می‌شناسیم. به همین مناسبت، زبان هندسی مربوط به فضاها، آشنا، ما را تحریک می‌کند که شبیه‌سازی کنیم. البته، چه بسا که، برخی از این شبیه‌سازی‌ها ما را به گمراهی بکشاند، زیرا رابطه‌های بین چهار عدد، ممکن است، به کلی با رابطه‌های بین سه عدد متفاوت باشد. به همین مناسبت، در مورد های تردید آمیز، به جبر بر می‌گردیم و تصورات خود را مورد تحقیق قرار می‌دهیم.

مثل همه مورد های مربوط به منطق و استدلال، یا باید مساله را به کمک جبر حل کرد یا نتیجه‌های منطقی را از چنان گزاره‌هایی از هندسه بیرون کشید که، خود، به صورت جبری ثابت شده باشند.

بنابراین، برای این که باروشی کاملاً منطقی عمل کرده باشیم، باید اصطلاح‌هایی همچون «موازی بودن»، «روی خط راست» و «در وسط» را به عنوان ترجمه موقعیت‌هایی از جبر، در نظر گرفت. در حالت‌های خاصی که، با فضای یک یا دو یا سه بعدی سروکار داریم، اگر به تفسیر جبر بر صفحه شطرنجی پردازیم، متوجه می‌شویم که، اصطلاح‌ها، با همان مفهوم‌های هندسه معمولی کاملاً تطبیق می‌کنند. ولی این، یک نتیجه ناشی از تجربه است. مثلاً در همان آغاز فصل دیدیم که، $C = A + B$ در کاغذ شطرنجی، متناظر با نقطه‌های O ، A ، B و C است که یک متوازی الاضلاع را تشکیل می‌دهند (به مفهوم روزانه و عملی کلمه). این نتیجه‌گیری را ثابت نکردیم، آن را نمی‌شود ثابت کرد، و به این اثبات، نیازی هم نیست. تناظر بین جبر «گره‌ها-سگ‌ها» و شکل‌هایی که روی کاغذ رسم شده‌اند، پدیده‌ای از دنیای واقع است؛ این تناظر را تنها بر اساس تجربه و آزمایش می‌توان برقرار کرد، نه بر اساس استدلال.

می‌توان با شجاعت تاکید کرد که هندسه اقلیدسی می‌تواند شرح کاملاً

دقیقی از رفتار اشیاء واقعی به دست دهد و، ضمناً، کم و بیش، دستگاهی منطقی است. آیا می‌توان با امکان‌های هندسه اقلیدسی ثابت کرد که نقطه‌های O, A, B و C باید يك متوازی الاضلاع تشکیل دهند؟ البته که می‌توان. ولی هندسه اقلیدسی، در مقایسه با جبر ساده این فصل، دشوار تر و پیچیده تر است. هدف ما بیشتر این بود که، ضمن روایت این فصل که با بعضی دستورالعمل‌های اضافی همراه بود، خود را به موقعیتی برسانیم که قادر به اثبات همه قضیه‌های هندسه اقلیدسی باشیم. ضمناً، ما از هندسه آغاز نکردیم، بلکه سعی کردیم به آن نزدیک شویم.

باتوجه به این مطلب، عمل‌های زیر را انتخاب می‌کنیم: از جبر «گره‌ها - سگ‌ها» آغاز می‌کنیم؛ واژه‌نامه‌ای برای بیان نتیجه‌های حاصل به زبان هندسه آفینی تنظیم می‌کنیم؛ به طریق تجربی، تحقیق می‌کنیم که قضیه‌های هندسه آفینی، برای شرح دنیای واقع، سودمندند؛ سپس، تعداد فرض‌های پذیرفته شده (اصل موضوع‌ها) را زیادتر می‌کنیم و، به کمک آن‌ها، هندسه اقلیدسی را می‌سازیم.

بنابراین، وقتی درباره فضای چهار بعدی (ویا فضایی که بعدها بیشتری دارد) صحبت می‌کنیم، به این باور تازه خود، از طریق منطقی نمی‌رسیم. تنها کار ما این است که به زبانی عینی متوسل می‌شویم که برای ایجاد شباهت بین جبر n نمادی و تجربه هندسی روزانه ما، مفید است.

۲

واژه‌نامهٔ هندسی

ضمن نتیجه‌گیری فصل قبل، دربارهٔ نظام واژه‌نامه‌ای صحبت کردیم که هندسه را به زبان جبری ترجمه می‌کند: اکنون در این جا، با حفظ روش قبل، برخی نکته‌های جزئی‌تر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. به کمک تناظری که بین جبر و هندسه، در فضای دویاسه‌بعدی، وجود دارد، خود را به تعریف‌هایی می‌رسانیم که برای فضایی با هرچند بعد دلخواه، برقرار باشند، بدون توجه به این که، این تعریف‌ها، برای مقابل تصویر هستند یا نه.

خط راستی که از مبداء مختصات می‌گذرد. در شکل ۳ دیدیم که نقطه‌های $O, P, 2P, 3P, 4P, \dots$ روی یک خط راست قرار دارند. اگر ضریب P را عدد کسری، گنگ یا منفی بگیریم، می‌توان به سادگی کشف کرد که، در این حالت‌ها هم، نقطهٔ ماروی همان خط راست قرار می‌گیرد؛ تنها در حالت منفی-بودن ضریب، نقطه در طرف دیگر مبداء واقع می‌شود. با توجه به این مطلب، خط راست OP را، به عنوان مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های به صورت tP ، تعریف می‌کنیم، که در آن، t عدد حقیقی دلخواهی است.

حرف t را، به تصادف، انتخاب نکرده‌ایم: خط راست را می‌توان به عنوان ردپای نقطهٔ متحرک دانست. در لحظهٔ نخست ($t=0$)، نقطهٔ ما بر مبداء مختصات قرار دارد، بعد از ۳ ثانیه ($t=3$)، به نقطهٔ $3P$ می‌رسد و ۵ ثانیه قبل ($t=-5$)، در نقطهٔ $5P-$ بوده است. یعنی، خط راست از همهٔ نقطه‌هایی تشکیل شده است که نقطهٔ متحرک، یاد گذشته در آن جا بوده است و یا در آینده در آن جا خواهد بود.

اکنون، دانش‌آموزی را در نظر بگیرید که بدآغاز می‌کند، ولی در اثر کار سخت و متوالی، نتیجهٔ کار خود را، به طور غیرعادی، به نحوی که در ارزیابی

زبان فرانوی	جغرافیا	دانش‌های طبیعی	زبان انگلیسی	حساب	هفته‌ها
۰	۰	۰	۰	۰	اول
۲	۹	۷	۳	۱۰	دوم
۴	۱۸	۱۴	۶	۲۰	سوم
۶	۲۷	۲۱	۹	۳۰	چهارم

چون پیشرفت دانش آموز، در هر هفته به وسیله پنج ارزیابی، مشخص می‌شود، بنابراین، برای تصور نموداری آن، به فضای پنج بعدی نیاز داریم. و اگر پیشرفت دانش آموز را در هفته اول، با P نشان دهیم، به سادگی می‌توان متوجه شد که پیشرفت او در هفته‌های بعد، به ترتیب، برابر با $2P$ و $3P$ بوده است. این نقطه‌ها هم، روی خط راستی قرار گرفته‌اند که از مبدا می‌گذرد، منتهی، خط راستی که در فضای پنج بعدی واقع است.

خط راست در حالت کلی. اگر شبیه همین استدلال را در مورد شکل ۵ دنبال کنیم، به این تعریف می‌رسیم که: خط راست عبارت است از مجموعه همه نقطه‌های به صورت $K+tP$ ، که در آن، K و P نقطه‌هایی ثابت و t عدد حقیقی دلخواهی است.

پاره خط راست را، به عنوان بخشی از خط راست می‌گیریم که بین دو نقطه A و B واقع باشد. قبلاً، برای نقطه‌هایی که بین A و B واقع‌اند و فاصله AB را به نسبت t بر $1-t$ تقسیم می‌کنند، رابطه‌ای به دست آوردیم؛ براساس این رابطه، می‌توان نتیجه گرفت که، پارخط AB از همه نقطه‌های به صورت $A+tB$ (تشکیل شده است، که در آن، t عددی است که در محدوده از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند. این تعریف پاره خط، به طور کامل، با تعریف قبلی خط راست، به عنوان همه نقطه‌های به صورت $K+tP$ ، سازگار است.

درواقع، اگر عبارت $A + tB + (1-t)A$ را به صورت $A + t(B-A)$ بنویسیم، به رابطه‌ای می‌رسیم که لازم داریم: اگر از نقطه A ، گام $(B-A)$ را برداریم، بایک گام، به نقطه B می‌رسیم. بنابراین، در لحظه $t=0$ در نقطه A و در لحظه $t=1$ در نقطه B ، و در فاصله زمانی بین ۰ و ۱، درجایی بین A و B قرار می‌گیریم.

تمرین

فضایی پنج بعدی داده شده است. حرف‌های c, d, e, f, g را می‌توان گره‌ها، فیل‌ها، سگ‌ها، قورباغه‌ها و غازها، نام گذاری کرد. نقطه‌ها به ترتیب زیر قرار گرفته‌اند:

$$A = 5c + 3d + e + f + 6g;$$

$$B = 3c + d + 5e + f + 4g;$$

$$C = c + 5d + 3e + 7f + 2g;$$

$$D = 2c + 3d + 4e + 4f + 3g;$$

$$E = 3c + 4d + 2e + 4f + 4g;$$

$$F = 4c + 2d + 3e + f + 5g;$$

$$G = 3c + 3d + 3e + 3f + 4g$$

۱. کدام یک از این نقطه‌ها، در وسط AB قرار دارد؟

۲. از نقطه D ، گام P را برمی‌داریم، که در آن داریم:

$P = c - e - f + g$. به کدام یک از نقطه‌های فوق، بعد از چند گام، می‌رسیم؟

۳. از نقطه C گام Q را برمی‌داریم: $Q = c - 2d + e - 3f + g$.

به کدام یک از نقطه‌های بالا، بعد از چند گام، می‌رسیم؟

۴. آیا هیچ کدام از نقطه‌های مفروض، در وسط CG قرار دارد؟

۵. آیا هیچ کدام از این نقطه‌ها روی FC و به فاصله $\frac{1}{3}FC$ از F قرار

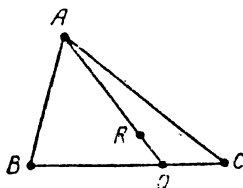
دارد؟

۶. برای رسیدن از C به E ، چه گامی را باید برداشت؟

۷. اگر از نقطه C همان گامی را بردارید که در تمرین ۶ از آن صحبت کردیم، از روی چه نقطه‌هایی عبور می‌کنید؟
۸. نقطه‌های A, B, C, D, E, F و G ، چه شکلی را نشان می‌دهند؟

حوزه درونی مثلث

قبلاً پیدا کردیم که نقطه G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC - واقع در درون مثلث واقع است و از برابری $G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ به دست می‌آید. به چه ترتیب می‌توان، در حالت کلی، خصلت نقطه دورنی مثلث را مشخص کرد؟ مثلاً درباره نقطه R ، که بر AQ و به فاصله $\frac{3}{4}AQ$ از A قرار دارد، چه می‌توان گفت، به شرطی که خود Q بر BC و به فاصله $\frac{2}{3}BC$ از B واقع باشد (شکل ۱۷). برای این که به این پرسش پاسخ بدهیم، این داده‌های هندسی را به زبان جبر می‌بریم. این که AR به اندازه $\frac{3}{4}$ فاصله AQ و BQ به اندازه



شکل ۱۷

$\frac{2}{3}$ فاصله BC را تشکیل می‌دهد، به ترتیب، به این معنا است که :

$R = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}Q$ و $Q = \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}C$. با توجه به هر دو نتیجه، به دست می‌آید:

$$R = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}B + \frac{2}{3}C\right) = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{2}C$$

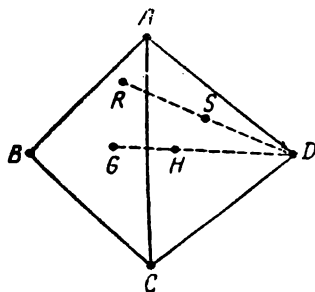
به سادگی می‌توان متوجه شد که عبارت‌های مربوط به Q و R ، همیشه از کسرهایی به دست می‌آیند که، مجموع آن‌ها، برابر ۱ می‌شود. اگر از نقطه‌های

دیگری و کسرهای دیگری استفاده کنیم، هر بار، به همین نتیجه می‌رسیم که، به طریق جبری، می‌توان به درستی آن قانع شد.

همه این‌ها، ما را به تعریف زیر، برای مفهوم « در درون »، می‌رساند: نقطه R را درون مثلث ABC گویند، به شرطی که داشته باشیم $R = xA + yB + zC$ ، که در آن، x و y و z ، عددهایی مثبت^۱ و سازگار با شرط $x + y + z = 1$ باشند. در اینجا، می‌توانید متوجه شباهت این تعریف، با تعریفی بشوید که برای پاره خط، به عنوان مجموعه نقطه‌های به صورت $(1-t)A + tB$ داشتیم. در آن جا هم، کسرهای t و $1-t$ ، مجموعی برابر ۱ دارند. بنابراین، اگر بخواهیم، می‌توانیم، درون یک پاره خط را، به عنوان مجموعه همه نقطه‌های به صورت $xA + yB$ تعریف کنیم، که در آن، x و y عددهایی مثبت و سازگار با شرط $x + y = 1$ باشند.

حوزه درونی چهار وجهی

چهار وجهی $ABCD$ مفروض است (شکل ۱۸). نقطه G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC است، بنابراین: $G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$. نقطه H روی DG و به فاصله $\frac{3}{4}DG$ از D قرار دارد، بعد از محاسبه‌های ساده،



شکل ۱۸

۱. هر یک از این عددها باید اکیداً مثبت باشد (یعنی برابر صفر نشود)، در غیر این صورت، به جای نقطه درونی، نقطه‌ای واقع بر محیط مثلث به دست می‌آید. همین نکته، در مورد نقطه‌های درونی چهار وجهی هم درست است (مترجم).

$$H = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D$$

البته، نقطه H در چهار وجهی باید دارای همان ویژگی‌های هندسی باشد که نقطه G در مثلث ABC دارد، ولی در این جا، به این ویژگی‌ها کاری نداریم. تنها به این نکته توجه می‌کنیم که نقطه H در درون چهار وجهی قرار دارد و مجموع کسرهای ضریب، در رابطه H ، برابر است با ۱. حالت‌های خاص، یا استدلال کلی جبری، ما را به این نتیجه می‌رساند که: هر نقطه درونی S از پاره خط RD ، به شرطی که R در درون مثلث ABC باشد، با عبارتی جبری بیان می‌شود که مجموع کسرهای ضریب در آن، برابر است با ۱. بنابراین، نقطه S را نقطه درونی چهار وجهی می‌دانیم وقتی که داشته باشیم: $S = xA + yB + zC + wD$ ، که در آن، x و y و z و w عددهایی مثبت‌اند که در برابری $x + y + z + w = 1$ صدق کنند.

نقطه‌های مورد بررسی A ، B ، C و D روی يك صفحه واقع نیستند و شکل ۱۸ را به عنوان شکلی درك می‌کنیم که در فضای سه بعدی واقع است. ولی این تعریف، و تعریف‌های دیگری که در این جا داشتیم، برای حالتی هم که نقطه‌های A ، B ، C و D ، مثلاً در فضای ۵ بعدی باشند، درست‌اند. مثلاً، اگر داشته باشیم:

$$\begin{aligned} A &= 5c + 3d + e + f + 6g, & B &= 3c + d + 5e + f + 4g, \\ C &= c + 5d + 3e + 7f + 2g, & D &= 7c + 7d + 7e + 7f + 4g \end{aligned}$$

آن وقت، H برابر $4c + 4d + 4e + 4f + 4g$ می‌شود، که در رابطه

$$H = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D$$

صدق می‌کند و، بنابراین، يك نقطه درونی از چهار وجهی است. به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$G = 3c + 3d + 3e + 3f + 4g$$

که همان نقطه $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ است و در درون مرزهای ABC قرار دارد.

سپس، می‌توان تحقیق کرد که نقطه G روی پاره خطی قرار دارد که نقطه A را به وسط BC وصل می‌کند و وسط BC عبارت است از نقطه

$$2c + 3d + 4e + 4f + 3g$$

نقطه‌های درونی سادک (سیمپلکس Simplex)

شکلی که هم‌اکنون مورد بحث قرار دادیم، وبا چهار نقطه A, B, C, D معین می‌شد، دست کم، در يك فضای سه بعدی قرار داشت.

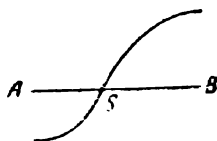
بحث مربوط به پنج نقطه A, B, C, D, E ، دست کم، مارا به فضای چهار بعدی می‌کشاند که دیگر نمی‌توان، به صورت عینی و محسوس، تصویری درباره آن داشت.

با وجود این، باتوجه به شباهت نزدیکی که با حالت قبل دارد، می‌توان نقطه درونی S از شکل $ABCDE$ را با برابری $S = xA + yB + zC + wD + vE$ تعریف کرد، که در آن x, y, z, w, v ، عددهایی مثبت اند و داریم:

$$x + y + z + w + v = 1$$

همه نقطه هایی که با این شرط سازگار باشند، حوزه ای را پر می‌کنند که ما آن را سادک چهار بعدی (یا سیمپلکس چهار بعدی) می‌نامیم. اگر بخواهیم، می‌توانیم حوزه درونی چهار وجهی، مثلث و پاره خط را هم، به ترتیب، سادک سه بعدی، سادک دو بعدی و سادک يك بعدی بنامیم. به همین ترتیب، می‌توان سادک پنج، شش، هفت یا n بعدی را تعریف کرد.

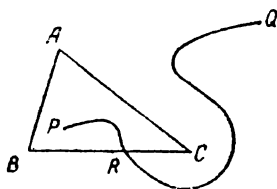
استدلال‌های کاملاً ساده‌ای وجود دارد که، در موقعیت‌های آشنای هندسی، مورد استفاده قرار می‌گیرند. مثلاً اگر بینیم که يك نمودار پیوسته (شکل ۱۹)، در نقطه A ، به اصطلاح، «پایین‌تر از سطح دریا» و در نقطه B



شکل ۱۹

«بالا تر» قرار گرفته است، آن وقت، نتیجه می گیریم که روی AB ، يك نقطه بینابینی وجود دارد که نمودار ما، در آن جا، «در سطح دریا» واقع می شود. از این نتیجه، اغلب برای حل عددی معادله ها، استفاده می کنند.

همچنین، اگر نقطه P ، نقطه درونی مثلث ABC را، به وسیله يك منحنی پیوسته، به نقطه ای واقع در بیرون مثلث وصل کنیم (شکل ۲۰)،



شکل ۲۰

می توانیم اطمینان داشته باشیم که، روی منحنی، نقطه ای مثل R پیدا می شود که، ضمناً، روی یکی از ضلع های مثلث قرار دارد.

یکی از کارهای ریاضیات جدید این است که بین بعضی از مورد های کاملاً آشنا، باموردهایی که به سختی می توان آن ها را به تصور آورد، همچنین، باموردهایی که نمی توان، برای روشن تر شدن آن ها، به شکل متوسل شد - مثل حالت هایی که شکل در فضایی بیش از سه بعد قرار دارد - سازگاری ایجاد کند. این راه، گاهی به هیچ گونه بحث قابل توجهی نیاز ندارد (زیرا، در واقع، نتیجه تازه ای به دست نمی آورد).

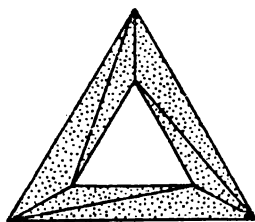
به عنوان نمونه، ضمن حل مساله های ساده مقدماتی هم، ممکن است، سادك ظاهر شود. مثلاً، مخلوطی را که شامل $\frac{1}{4}$ از رنگ قرمز، $\frac{1}{4}$ از رنگ آبی

و $\frac{1}{4}$ از رنگ زرد باشد، می توان به صورت $\frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C$ معرفی کرد.

مجموع ضریب ها، برابر است با واحد. این سادك دوبعدی را می توان به صورت يك مثلث معمولی نشان داد. هر آلیاژی که از پنج فلز درست شده باشد يك سادك چهار بعدی و هر غذایی که شامل ۱۷ نوع ماده جزئی باشد، يك سادك شانزده بعدی را تشکیل می دهد.

البته، ما نمی‌توانیم این سادک‌ها را پیش‌خود تصور کنیم، آن طور که می‌توانیم، مثلاً، مثلث را، به‌صورتی عینی در نظر بیاوریم. ولی حتی در این مورد هم، توضیح هندسی می‌تواند بخشی از خدمت نمودار را به‌ما عرضه کند این توضیح، ما را به این اندیشه می‌رساند که حوزه مورد نظر، چیزی از نوع مثلث یا چیزی از نوع چهاروجهی است، ولی «چیزی» خیلی بیشتر از آن‌ها. این توضیح به ما اطلاع می‌دهد که با حوزه‌ای محدود سروکار داریم که از هیچ «سمت» به بی‌نهایت نمی‌رود، از یک تکه تشکیل شده است و دارای نقطه‌های زاویه‌ای است. این آگاهی‌ها علی‌رغم نارسائی‌های خود، منجر به اندیشه‌های سودمندی برای ما می‌شوند.

اگر مثلث‌های زیادی در اختیار داشته باشید، می‌توانید با چسباندن آن‌ها به یکدیگر، به ردیف‌های مختلف، شکل‌های بسیار متنوعی به دست آورید. مثلاً، به کمک شش مثلث، می‌توانید شکلی مسطحه درست کنید که سوراخی در وسط داشته باشد، شبیه آنچه در شکل ۲۱ می‌بینید. می‌توانید از صفحه خارج



شکل ۲۱

شوید و نمونه شکل‌هایی را بسازید که سطح آن‌ها به سطح کره یا سطح حلقه نزدیک باشد. همچنین، با به هم چسباندن چهاروجهی‌ها، می‌توانید شکل‌های فضایی بغرنج‌تری را به دست آورید. این روش کنار هم گذاشتن یا به هم چسباندن شکل‌های ساده برای به دست آوردن شکل‌های بغرنج‌تر، یکی از ابزارهای اساسی توپولوژی ترکیبی است. این روش، در اصطلاح‌ها هم منعکس می‌شود: سادک به بلوک‌های ساده ساختمانی گفته می‌شود؛ ولی اگر از سادک‌ها، موضوع بغرنج‌تری ساخته شود، آن را مختلط (یا کمپلکس) می‌نامیم.

۱. *simplex* هم، در زبان انگلیسی، یعنی ساده.

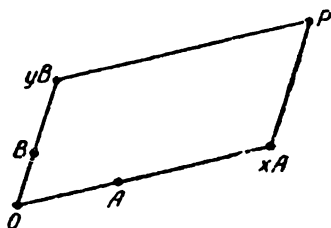
[*complex* در مقابل *simplex*]. ریاضی دانانی که روی توپولوژی ترکیبی کار می کنند، با در نظر گرفتن مختلط (کمپلکس) به عنوان تعمیمی از مثلث با هر تعداد محدود بعد، بدون این که خود را در چارچوب فضاها محدود کنند، امکان تصور عینی و محسوس را، برای ما، فراهم می آورند.

برداشتن محدودیت ها

درون مثلث را همچون مجموعه نقطه های به صورت $xA + yB + zC$ تعریف کردیم که با دو شرط سازگار باشند: ۱) عددهای x ، y و z باید مثبت باشند و ۲) داشته باشیم $x + y + z = 1$. به طور طبیعی این پرسش پیش می آید که: اگر یکی از این شرط ها و یا هر دو آنها را برداریم، چه تغییری به وجود می آید؟

بهر آن است که این پرسش را روی حالت های ساده و به ردیف زیر مورد بررسی قرار دهیم: ابتدا حالت نموداری را در نظر می گیریم و، سپس، شرح منطقی آن را می دهیم. طبیعی است که از حالت $xA + yB$ آغاز کنیم. ابتدا فرض می کنیم، شرط $x + y = 1$ رعایت شده باشد، ولی مثبت بودن x و y را نخواسته باشیم. به این ترتیب، x می تواند هر عدد دلخواه باشد، ولی y باید در برابر $y = 1 - x$ صدق کند یعنی به همه نقطه هایی نظر داریم که به صورت $Ax + (1 - x)B$ و یا به صورت $B + x(A - B)$ باشند. و همان طور که می دانیم، این صورت متناظر با خطر راستی است که، ضمن حرکت از نقطه B به سمت A ، یا گامی به دست می آید که، طول آن، متناظر است با ضریب $(B - A)$ ، یعنی هر عدد دلخواه (مثبت، منفی، کسری).

حالا فرض می کنیم، هر دو شرط را برداریم؛ در نتیجه، با همه نقطه هایی سروکار داریم که به صورت $xA + yB$ هستند. بلافاصله، به تفسیر نموداری متوسل می شویم. نقطه xA روی خط راست OA و نقطه yB روی خط راست OB قرار دارد (شکل ۲۲) مجموع $xA + yB$ با ساختن متوازی الاضلاع پیدا می شود و نقطه P را نشان می دهد. با تغییر دادن x و y ، نقطه P می تواند در هر جایی از صفحه OAB واقع شود، یعنی جای آن می تواند تمامی صفحه را پر کند.



شکل ۲۲

تعریف صفحه‌ای که از مبدا مختصات می‌گذرد. با توجه به آنچه هم- اکنون گفتیم، صفحه OAB را، به عنوان همه نقطه‌های به صورت $xA + yB$ تعریف می‌کنیم، به شرطی که نقطه‌های O ، A و B روی یک خط راست واقع نباشند. اگر در فضای دو بعدی زندگی می‌کنیم، صفحه OAB به معنای «همه نقطه‌هایی است که در اختیار داریم». ولی، چون در فضای سه بعدی هستیم، چنین وضعی پیش نمی‌آید. اغلب، در جست و جوی نقطه‌هایی هستیم که متعلق به صفحه OAB نیستند، یعنی در بیرون آن واقع‌اند.

فضاهای خطی

به این ترتیب، دو تعریف داریم: خط راست OA عبارت است از همه نقطه‌های به صورت xA ، صفحه OAB ، عبارت است از همه نقطه‌های به صورت $xA + yB$. خط راست یک بعد و صفحه دو بعد دارد. اگر در زندگی روزانه در همین جا متوقف می‌شویم، به این مناسبت است که نیازی به تعریف فضای سه بعدی نداریم. برای ما، تمامی جهانی که در آن زندگی و حرکت می‌کنیم، همان فضای سه بعدی است. ولی اگر بخواهیم درباره فضای n بعدی تصویری داشته باشیم، دیگر نمی‌توانیم در این جا توقف کنیم. همان طور که صفحه در فضای سه بعدی قرار دارد و، بنابراین، نه از همه نقطه‌های فضای سه بعدی، بلکه از بعضی نقطه‌های آن ساخته شده است، فضای سه بعدی را هم می‌توان از بعضی نقطه‌های فضای چهار بعدی ساخت و غیره. راه روشنی، برای ادامه این ساختمان وجود دارد. فضای خطی سه بعدی $OABC$ ،

یعنی همهٔ نقطه‌های به صورت $xA+yB+zC$ ؛ فضای خطی چهاربعدي $OABCD$ ، یعنی همهٔ نقطه‌های به صورت $xA+yB+zC+wD$ و همین‌طور تابی‌نهایت.

تعریفی که در این جا از فضای سه‌بعدي داریم، با تجربهٔ روزانهٔ ماتریک می‌کند. اگر نقطه‌های O, A, B, C را طوری انتخاب کنیم (شکل ۱۶)، که خط راست OA در جهت خاور، OB در جهت شمال و OC به طرف بالا باشد، آن وقت می‌توانیم با جابه‌جایی همزمان، به اندازهٔ x و y و z ، در هریک از این جهتها، به هر نقطه‌ای از جهان خود برسیم.

ولی، با بیرون رفتن از مرزهای فضای سه‌بعدي، تلقی و درک مانا توان می‌شود. مانمی‌توانیم، جهان خود را، همچون یک شیء مسطح به تصور آوریم که در فضایی با چهار بعد قرار گرفته است. برای این که باموضوع‌های عینی‌تری سروکار داشته باشیم، از طرح نظریهٔ مربوط به امکان منحنی بودن فضا، صرف نظر می‌کنیم. بنابراین، در مورد این گونه موضوع‌ها، باید چشم امید به جبر و شباهت‌ها (قیاس‌ها) بدوزیم.

مثال. فضای چهاربعدي بانمادهای پایه‌ای («جانوران») e, d, c, f و مفروض است. فرض کنید: $A=e-d$ ؛ $B=d-e$ ؛ $C=e-f$ ؛ می‌خواهیم ثابت کنیم که، نقطهٔ $c+d+e+f$ ، در فضای سه‌بعدي $OABC$ واقع نیست.

حل. اگر این نقطه در فضای سه‌بعدي واقع باشد، باید داشته باشیم:

$$c+d+e+f = xA+yB+zC = x(c-d) + y(d-e) + z(e-f) = xe + (y-x)d + (z-y)e - zf$$

اگر ضریب‌های c, d, e, f را در دو عبارت اول و آخر برابر قرار دهیم، به دست می‌آید.

$$x=1, \quad y-x=1, \quad z-x=1, \quad -z=1$$

از سه معادله اول، به دست می‌آید: $x=1, y=2, z=3$ ، که با معادلهٔ چهارم متناقض است. بنابراین، نقطهٔ $c+d+e+f$ را نمی‌توان به صورت $xA+yB+zC$ بیان کرد و، در نتیجه، در فضای $OABC$ قرار ندارد.

بستگی خطی

به نکته مهمی توجه کنیم. وقتی که صفحه را به عنوان مجموعه همه نقطه‌های به صورت $xA + yB$ تعریف می‌کنیم، باید قید کنیم که نقطه‌های O ، A و B بزرگ خط راست واقع نیستند. اگر OA سمت خاور و OB هم سمت خاور را نشان دهد، آن وقت، هر ترکیب $xA + yB$ ، باز هم در جهت خاور خواهد بود. به زبان دیگر، اگر A به معنای ۲ گربه و B به معنای ۳ گربه باشد، آن وقت، $xA + yB$ به معنای $(2x + 3y)$ گربه خواهد بود. x و y را هر چه انتخاب کنیم، نمی‌توانیم از محورهای گربه‌ها خارج شویم، یعنی در هر حال، نقطه‌های واقع بر خط راست به دست می‌آید، نه نقطه‌های واقع بر صفحه.

در مورد هر فضایی، با هر چند بعد، می‌توان به چنین حقیقتی رسید. فرض کنید، در فضای عادی سه بعدی ما، c ، d و e ، به ترتیب، معرف نقطه‌های خاور و شمال و بالا، نسبت به مبدا D ، باشند. بنا بر شرط‌های معمول، عبارت $xA + yB + zC$ ، همه نقطه‌های فضای ما را، به دست می‌دهد. اکنون فرض می‌کنیم $A = c$ ، $B = d$ و $C = c + d$. اضافه کردن A ما را به خاور می‌برد، اضافه کردن B به شمال و اضافه کردن C به شمال خاوری. همه این سفرها، روی صفحه افقی جریان دارد و هر جور که x و y و z را انتخاب کنیم، نمی‌توانیم از زمین جدا شویم. فرض را بر این می‌گیریم که، با سه عنصر A ، B و C سروکار داریم. ولی خود A ، B ، C ، تنها از دو عنصر c و d تشکیل شده‌اند.

هر جا که با چنین وضعی روبرو باشیم، می‌گوییم، عناصرها به طوری خطی به هم بستگی دارند. قرار می‌گذاریم که فضای تشکیل شده از همه نقطه‌های $xA + yB + zC$ به وسیله نقطه‌های A ، B و C ، به وجود آید؛ فضای شامل همه نقطه‌های $xA + yB + zC + wD$ به وسیله نقطه‌های A ، B ، C و D به وجود آید و غیره. بنابراین، می‌توان گفت که: نقطه‌های جداگانه وقتی دارای بستگی خطی هستند که فضایی را با تعداد بعدهایی کمتر از آن چه با تعداد این نقطه‌ها معین می‌شود، به وجود آورند. به زبان دیگر، در حالتی که نقطه‌ها دارای بستگی خطی هستند، فضایی به وسیله آن به وجود می‌آید که نمی‌توانست،

درواقع، با تعداد نقطه‌های کمتری ایجاد شود.

وقتی که فضایی، با چند نقطه $A, B, C, \dots$ به وجود می‌آید می‌توانیم این طور تصور کنیم که این نقطه‌ها، به نوبت، داده می‌شوند. نقطه اول، خط راست OA را می‌سازد، با ظهور نقطه دوم B ، انتظار داریم که این مجموعه نقطه‌ها، روی صفحه $xA+yB$ گسترش یابد، به کمک نقطه C امیدواریم، فضای سه بعدی ساخته شود و غیره. اگر هر نقطه‌ای که ظاهر می‌شود، تعداد بعدهای فضا را ۱ واحد اضافه کند، آن وقت، می‌توانیم، در آخر کار، به فضایی برسیم که منتظر آن بودیم.

ولی اگر به فضایی با بعدهای کمتر برسیم، به معنای آن است که، دست کم یکی از نقطه‌ها، با ظاهر کردن خود، هیچ چیز تازه‌ای به ما نداده است و خود در فضایی قرار گرفته است که با نقطه‌های قبلی به دست آمده بود. نمونه این وضع: حالت $A=c, B=d, C=c+d$ است. دو نقطه اول A و B ، سطح زمین را به وجود می‌آورند. نقطه C هم روی زمین قرار دارد و هیچ چیز تازه‌ای به ما نمی‌دهد. از نظر جبری، این موقعیت را، با معادله $C=A+B$ نشان می‌دهند و به معنای آن است که C ، ترکیبی از همان عنصرهای قبلی است. این وضع، در هر مرحله‌ای ممکن است پیش آید. مثلاً، فرض کنید $A=2c, B=3c, C=d$. در این جا، C آگاهی تازه‌ای به همراه دارد، ولی B همه چیز را خراب می‌کند و نمی‌توان چیزی را، با آن، درست کرد! نقطه C ، به تنهایی، نمی‌تواند دو بعد تازه اضافه کند تا اشتباه نقطه B تصحیح شود و موقعیت را نجات دهد. نظر جبری، ناتوانی B را در طرح چیزی تازه، با برابری $B=\frac{1}{2}A$ بیان می‌کنند. ممکن است گفته شود که،

برای A ، چنین وضعی پیش نمی‌آید، زیرا چیزی قبل از آن وجود ندارد که بتواند از آن پیروی کند. ولی، پیش خود فرض کنید که A بر مبداء O منطبق باشد، در این صورت، به معنای فقدان کامل گره‌ها، سگ‌ها و فیل‌ها است؛ یعنی A ، معرف چیزی نیست. در جبر، این وضع را، با برابری $A=0$ نشان می‌دهند. این سه حالت، متناظر با سه معادله‌اند: $A+B-C=0$ ، $3A-2B=0$ و $A=0$. در معادله دوم، ضریب C و در معادله سوم،

ضریب‌های B و C ، برابر صفرند. ولی البته، نمی‌توان يك بستگی خطی درست کرد که به صورت معادله $0.C + 0.B + 0.A = 0$ باشد، که در آن، همه ضریب‌ها برابر صفرند. در این حالت، هر مقدار دلخواهی را می‌توان به جای A ، B و C قرار داد و، بنابراین، نمی‌توان رابطه‌ای بین آن‌ها برقرار کرد. همه این‌ها را می‌توان، در تعریف بستگی خطی که در کتاب‌های درسی آمده است، پیدا کرد: A ، B و C در يك بستگی هستند، به شرطی که در برابری $0 = pA + qB + rC$ صدق کنند و، دست کم، یکی از ضریب‌های p ، q یا r مخالف صفر باشد. شبیه همین تعریف را، برای حالت n نقطه هم، می‌توان تنظیم کرد.

در ساختمان منطقی نظریه صوری بستگی خطی، نکته‌ای وجود دارد که نیاز به توجهی خاص دارد. در این نظریه، هیچ چیز نامنتظر پیش نمی‌آید. پایه‌گذاری دقیق این نظریه، همه آن چه را که در هندسه معمولی سه بعدی می‌بینید، تایید می‌کند. با وجود این، بستگی خطی، مفهومی بسیار مهم است.

رسیدگی روی بستگی خطی

فرض کنیم، سه نقطه A ، B و C ، در يك فضای پنج بعدی داده شده باشند:

$$A = c + 2d + 3e + 4f + 5g,$$

$$B = 6c + 7d + 8e + 9f + 10g,$$

$$C = 11c + 12d + 13e + 14f + 15g,$$

می‌پرسیم که: آیا این نقطه‌ها در بستگی خطی هستند؟ این مساله، اغلب پیش می‌آید و حل آن را، می‌توان به صورت زیر دنبال کرد. فرض می‌کنیم، نقطه‌ها به ردیف A ، B و C داده شده باشند. روشن است که A بر O منطبق نیست، بنابراین، A کار خودش را انجام می‌دهد و خط راستی را به وجود می‌آورد. اما، در مورد B ، چه پیش می‌آید؟ برای B ، وقتی حساب‌ما، اشتباه درمی‌آید که مضربی از A باشد. چون، A از c و B از $6c$ آغاز شده است، بنابراین، B وقتی مضربی از A است که 6 برابر A باشد، یعنی B به صورت $6A = 6c + 12d + \dots$ درآید که با مقدار B ، که جمله دوم آن $7d$ است، تطبیق نمی‌کند. به این ترتیب، B مضربی از A نیست و، در نتیجه، همان جهت A را مشخص نمی‌کند؛ به این ترتیب، نقطه‌های

به صورت $xA + yB$ صفحه را پرمی کنند. آیا نقطه C ، در این صفحه قرار دارد؟ آیا می‌توانیم C را به صورت $xA + yB$ بیان کنیم؟ باید بینیم که، آیا می‌توان مقادیرهای x و y را طوری پیدا کرد که در برابری $xA + yB = c$ صدق کنند؟ برای این منظور، کافی است دو معادله پیدا کنیم، بنابراین، تنها دو عدد نخست را در نظر می‌گیریم. چون A با $c + 2d + \dots$ و B با $6c + 7d + \dots$ آغاز می‌شود، بنابراین، $xA + yB$ با $(x + 6y)c + (2x + 7y)d + \dots$ آغاز می‌شود. و این، با آغاز C وقتی تطبیق می‌کند که داشته باشیم:

$$x + 6y = 11 \text{ و } 2x + 7y = 12$$

که از آن جا به دست می‌آید: $x = -1$ ، $y = 2$. تنها همین عددها، می‌توانند آغاز درستی برای C به وجود آورند. اگر این مقادیرهای x و y ، نتوانند عبارت لازم را برای C به وجود آورند، به این معنا خواهد بود که، اصلاً، چنین ترکیبی از A و B وجود ندارد. در مورد مثال ما، $A + 2B$ — کاملاً — بر C منطبق می‌شود، بنابراین، نقطه‌های A ، B و C ، به طور خطی به هم بستگی دارند (و ضمناً، B وسط AC است). کافی است، یکی از ضریب‌های C را تغییر دهیم، تا دیگر بین A ، B و C ، یک بستگی خطی وجود نداشته باشد و فضایی سه بعدی را به وجود آورند.

يك نتیجه جالب و مفید

جنبه روشنی وجود دارد که، در دید اول، ممکن است بی‌فایده به نظر آید. فرض کنید، در فضای دو بعدی بانمادهای پایه‌ای c و d ، سه نقطه A ، B و C داده باشد، مثلاً $A = 3c + 8d$ ، $B = 7c + 5d$ ، $C = 27c + 31d$. این سه نقطه، که بر يك صفحه قرار دارند و معرف امتدادهایی هستند که از نقطه O می‌گذرند، نمی‌توانند پدید آورنده يك فضای سه بعدی باشند. چون، این نقطه‌ها، از دو عنصر c و d تشکیل شده‌اند، حداکثر، می‌توانند همین صفحه را تولید کنند. بنابراین، باید رابطه‌ای خطی به صورت $pA + qB + rC = 0$ وجود داشته باشد، که در آن، دست کم یکی از ضریب‌های p ، q یا r مخالف صفر باشد. و این نقطه‌ها، در واقع، در رابطه $2A + 3B - C = 0$ صدق می‌کنند. ولی، این مطلب، در مورد هر سه نقطه دلخواهی که در يك فضای

دو بعدی واقع باشند، درست است.

شبیه همین استدلال را، در مورد يك فضای سه بعدی هم، می توان انجام داد. مثلاً چهار نقطه A, B, C و D ، که در يك فضای سه بعدی واقع اند، نمی توانند موجود يك فضای چهار بعدی باشند، بنابراین، به طور خطی به هم بستگی دارند و با معادله $pA + qB + rC + D = 0$ به هم مربوط می شوند.

با تعمیم این بحث نتیجه می گیریم که، $n+1$ نقطه از فضای n بعدی دارای بستگی خطی هستند و با معادله مشابهی به هم مربوط می شوند. این مطلب، که ازدیدگاه هندسی امری طبیعی است، عادی تر از آن به نظر می آید که توجه ما را به خود جلب کند. ولی توجه به آن، از این بابت مفید است که، در بسیاری موردها، وجود معادله ای را ثابت می کند. بعداً، وقتی که به ماتریس ها پردازیم، بیشتر به این مطلب قانع می شویم، ولی در این جا هم، يك مثال عددی می آوریم. می خواهیم ثابت کنیم که عدد به صورت $t = 1 + 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 7\sqrt{6}$ ، حتماً در يك معادله درجه چهارم صدق می کند، که دیگر ضریب های آن گنگ نیستند و شامل عددهایی از نوع $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ نمی شوند. $c=1, d=\sqrt{2}, e=\sqrt{3}, f=\sqrt{6}$ می گیریم و t را به صورت $t = 1c + 5d + 4e + 7f$ می نویسیم که متناظر به يك نقطه در فضای چهار بعدی است. اکنون t^2 را پیدا می کنیم. برای این منظور، به محاسبه ای کسل کننده نیاز داریم، ولی خوشبختانه، احتیاجی به پاسخ دقیق نیست، بلکه کافی است بدانیم که t^2 بر حسب عددهای $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ ، همچنین، عددهای درستی که از ترکیب c, d, e و f به دست می آیند، قابل بیان است. در واقع، با انجام عمل ضرب، به دست می آید:

$$t^2 = 393 + 178\sqrt{2} + 148\sqrt{3} + 54\sqrt{6}$$

یعنی

$$t^2 = 393c + 178d + 148e + 54f$$

ولی، این عددهای مشخص، هیچ نقشی به عهده ندارند. برای ما، این مطلب مهم است که t^2 هم در جهان فضای چهار بعدی واقع است. به همین ترتیب، می توان قانع شد که t^3 و t^4 هم، به همین فضا تعلق دارند. معلوم

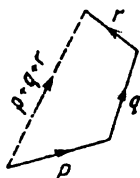
می شود که پنج نقطه t^1, t^2, t^3, t^4 ، در فضای چهار بعدی قرار دارند. در نتیجه، این نقطه ها باید به طور خطی، به هم بستگی داشته باشند و معادله $pt^4 + qt^3 + rt^2 + st + p = 0$ می توان ثابت کرد که، عددهای p, q, r, s, k گویا هستند و شامل $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ ، که در این جا با d, e, f نشان داده شده اند، نیستند؛ درست همان طور که قبلاً، سگ ها و فیل ها و قورباغه ها نقشی به عهده نداشتند.

به این ترتیب، ثابت کردیم که يك معادله درجه چهارم وجود دارد که t در آن صدق می کند. همین مثال ساده، نیرو و مرزهای جبر جدید را نشان می دهد. این روش، از هر روش دیگری که به جبر سنتی مربوط باشد، ساده تر است، زیرا برای اثبات حکم خود، به هیچ گونه محاسبه طولانی، نیاز نداشتیم. ولی امکان های آن، به همین اثبات وجود معادله ختم می شود، و اگر بخواهیم خود معادله را به دست آوریم، باید انجام محاسبه های طولانی را تحمل کنیم. با وجود این جبر جدید، چنان روش هایی برای محاسبه حقیقی در اختیار ما می گذارد که، بدون کمک آن، حتی به ذهن ما هم نمی رسید.

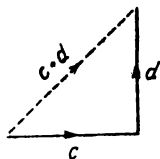
نمونه های فضاهای خطی

ممکن است مطالب دو فصل اول، بدون تنوع و یکنواخت به نظر آید، زیرا همه آن ها به عبارتهای ساده ای از نوع $4e = 5d + 2c$ مربوط می شد که، البته، تفسیرهای مختلفی درباره آن ها کردیم. c در يك حالت گربه بود، در حالت دیگر نقطه، در مورد سوم، نشانه ای برای حساب بود و در مورد چهارم عدد $\sqrt{2}$ را نشان می داد.

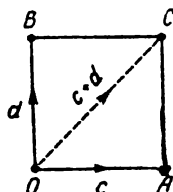
در همه این حالت ها، عمل ها را با علامت « $+$ » نشان دادیم، اگرچه ارزش مفهومی آن ها، بایکدیگر متفاوت بود. در حالت هایی که c به جای گربه یا $\sqrt{2}$ بود، مفهوم « $+$ »، همان جمع معمولی است، یعنی جمع به مفهومی که در حساب وجود دارد. ولی، برای دو نقطه A و B ، مجموع $A+B$ به معنای راس چهارم متوازی الاضلاعی است که سه راس O, A و B از آن در دست باشد، یعنی علامت « $+$ » به عملی مربوط می شود که چندان روشن نیست. درست است که این تعریف جمع، به کمک متوازی الاضلاع، مدت ها است که



شکل ۲۵



شکل ۲۴



شکل ۲۳

هم درمکانیک و هم در دانش‌های دیگر (الکتریسیته، مغناطیس، آیرودینامیک) به عنوان یک قانون، مورد استفاده قرار می‌گیرد. تنها در آن‌جا، c و d ، به جای نقطه‌های A و B ، معرف پاره خط‌های جهت‌دار OA و OB هستند که مبدا O را به این نقطه‌ها وصل کرده‌اند (شکل ۲۳). ولی، آن چه که به محاسبه‌های روی c و d مربوط می‌شود، به هیچ وجه ربطی به این ندارند که c را نقطه A بگیریم یا پاره خط جهت‌دار OA . تفسیر اخیر، اغلب، کار را ساده‌تر می‌کند. روی شکل ۲۴، نتیجه اضافه کردن P را به G, F, E, D نشان دادیم، که به کمک انتقال‌های موازی با هم و به وسیله پاره خط‌های هم جهت و با طول‌های برابر DD^*, EE^*, FF^* و GG^* بیان شده‌اند. شبیه آن، می‌توان مجموع c و d را با انتقال پاره خط جهت‌دار d به انتهای پاره خط c مشخص کرد، آن‌طور که در شکل ۲۴ می‌بینیم، این شیوه، ما را از رسم متوازی‌الاضلاع آزاد می‌کند. بخصوص، وقتی که بخواهیم بیش از دو مقدار را باهم جمع کنیم، این شیوه، شکل را به طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌کند (شکل ۲۵ را ببینید).

اندیشه جمع نیروها، سرعت‌ها، شتاب‌ها و سایر کمیت‌های فیزیکی، در سده نوزدهم به رسمیت شناخته شد. کمیت‌هایی را که به صورت پاره خط‌های جهت‌دار نشان داده می‌شوند، بردار و عمل مربوط به ترکیب آن‌ها را (که در بالا بررسی کردیم)، جمع برداری گویند. این اندیشه، باعبور از صافی فیزیک ریاضی، به ریاضیات خالص وارد شد و، در آن‌جا تاحدی، تفسیر تازه‌ای پیدا

۱. این قاعده جمع پاره خط‌های جهت‌دار (بردارها) را، قاعده چندضلعی می‌نامند. این قاعده، به همان نتیجه‌ای منجر می‌شود که با استفاده متوالی از قاعده متوازی‌الاضلاع، به آن می‌رسیم. ۲.

کرد. در فیزیک و ریاضیات کار بسته، بردار به ردهٔ معین و کاملاً شناخته شده‌ای از کمیت‌ها اطلاق می‌شود. وقتی که با کمیتی روبه‌رو می‌شوید، می‌توانید بلافاصله تشخیص دهید که آیا بردار است یا نه. مثلاً، سرعت را می‌توان به صورت پاره‌خط جهت‌دار تصور کرد، در حالی که چنین تصویری برای جرم ممکن نیست. بنابراین، سرعت، برخلاف جرم، یک بردار است. ولی، ریاضیات خالص، علاقه‌ای به طبیعت فیزیکی چیزها ندارد؛ در این‌جا، همه چیز را با نمادها نشان می‌دهند. ریاضیات خالص؛ تنها به قانون‌مندی‌های ریاضی ناشی از این چیزها (کمیت‌ها) علاقه‌مند است. از همین راه است که ریاضیات، به تعریف فضای برداری، به عنوان مجموعه‌ای از چیزها می‌رسد که، در مورد آن‌ها، می‌توان با استفاده از قاعده‌هایی که در فیزیک برای بردارها وجود دارد، قاعده‌هایی صوری برای آن‌ها پیدا کرد. به زبان فصل اول، بردارها، چیزهایی هستند که می‌توان آن‌ها را، همچون حالتی که گروه‌هایی از جانوران‌اند، با هم ترکیب کرد. موضوع‌های به کلی گوناگونی زیر چتر این تعریف قرار دارند، که هیچ شباهتی بین آن‌ها با نیرو و سرعت نمی‌توان پیدا کرد. محاسبه

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x + 4 \\ 5x^2 + 6x + 7 \\ \hline \end{array} +$$

$$7x^2 + 9x + 11$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x + 4 \\ 5 \\ \hline \end{array} \times$$

$$10x^2 + 15x + 20$$

را با محاسبه

$$\begin{array}{r} 2 \text{ گربه، } 3 \text{ سگ و } 4 \text{ بچه خوک} \\ 5 \text{ گربه، } 6 \text{ سگ و } 7 \text{ بچه خوک} \\ \hline \end{array} +$$

$$7 \text{ گربه، } 9 \text{ سگ و } 11 \text{ بچه خوک}$$

$$\begin{array}{r} 2 \text{ گربه، } 3 \text{ سگ و } 4 \text{ بچه خوک} \\ 5 \\ \hline \end{array} \times$$

$$10 \text{ گربه، } 15 \text{ سگ و } 20 \text{ بچه خوک}$$

مقایسه می‌کنیم - در هر دو مورد، عمل‌های یکسانی انجام گرفته است. بنابراین، می‌توانیم بگوییم که سه جمله‌ای‌های درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c$ ، یک فضای برداری سه‌بعدی را تشکیل می‌دهند. دو محاسبه دیگر را مقایسه می‌کنیم:

۲ گربہ و ۳ سگ

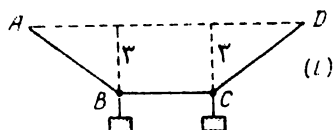
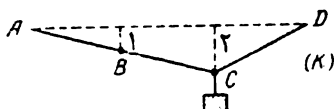
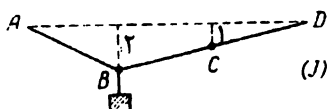
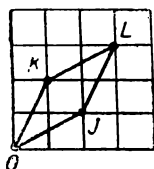
+ ۴ گربہ و ۵ سگ

۷ گربہ و ۸ سگ

شکل ۲۶

فرض کنید، تکه سیم دراز کاملاً کشیده شده‌ای را در اختیار داشته باشیم. در نقطه‌های B و C ، به نحوی که روی شکل ۲۶ نشان داده شده است وزنه‌های P و Q را آویزان می‌کنیم که، تحت تأثیر آن‌ها، سیم به ترتیب به اندازه x و y اینچ کشیده می‌شود. این وضع $ABCD$ سیم را می‌توان با دو عدد x و y ، و به عبارت دیگر، با نقطه S به مختصات x و y ، مشخص کرد. ولی در این صورت، می‌توان توجه کرد که همه وضع‌های ممکن سیم، تشکیل یک فضای دوبعدی می‌دهند. و این، به نوبه خود، به ما امکان می‌دهد که درباره جمع دو وضع سیم، صحبت کنیم. ولی آیا، این جمع کردن، مفهومی دارد؟ روی شکل ۲۷، سه نقطه J ، K ، L و موقعیت‌هایی از سیم که با آن‌ها متناظرند، نشان داده شده است. فرض‌هایی که درباره این موقعیت‌ها وجود دارد، چنین است:

موقعیت	P	Q	x	y
J	۱	۰	۲	۱
K	۰	۱	۱	۲
L	۱	۱	۳	۳

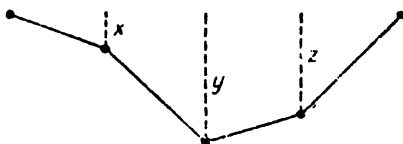


شکل ۲۷

نقطه‌های O, J, K, L ، در روی کاغذ شطرنجی، یک متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند، به نحوی که $J = K + L$. از جدولی که در این جا داده‌ایم، دیده می‌شود که، این برابری، دارای معنای فیزیکی است. همهٔ عددهایی را که در سطر ردیف L واقع‌اند، به ترتیب می‌توان از جمع عددهایی که در سطرها ردیف J و K قرار دارند، به دست آورد. در حقیقت، از جدول، همهٔ موقعیت‌های ممکن سیم به دست می‌آید. اگر می‌خواستیم بدانیم با آویزان کردن ۵ فونت در نقطهٔ B و ۳ فونت در نقطهٔ C ، چه وضعی پیش می‌آید، موقعیت $5J + 3K$ را مورد بررسی قرار می‌دادیم، که متناظر است با جدول زیر:

موقعیت	P	Q	x	y
$5J$	۵	۰	۱۰	۵
$3K$	۰	۳	۳	۶
$5J + 3K$	۵	۳	۱۳	۱۱

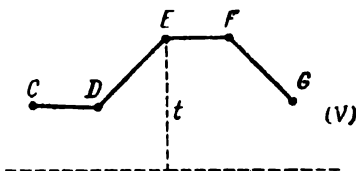
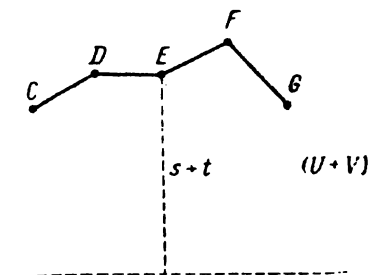
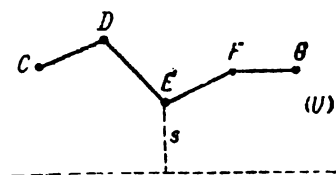
در حالتی که روی سیم، سه نقطهٔ بینابینی انتخاب کرده باشیم، (شکل ۲۸ را ببینید)، آن وقت برای تعریف چنین وضعی از سیم، به سه عدد x, y و z نیاز داریم. وضع سیم، به وسیلهٔ نقطه‌ای از فضای سه بعدی داده می‌شود. از موضع ریاضیات خالص، نیازی به این بیان نداریم که: وضع سیم را می‌توانیم



شکل ۲۸

در يك فضای سه بعدی روشن کنیم. کافی است، به طور ساده گفته شود که: موقعیت‌های ممکن سیم، يك فضای سه بعدی را تشکیل می‌دهند. در حالتی که سیم، به وسیله γ نقطه جدا شده باشد، موقعیت‌های مختلف آن، يك فضای هفت بعدی و، در حالت n نقطه، يك فضای n بعدی تشکیل می‌دهند.

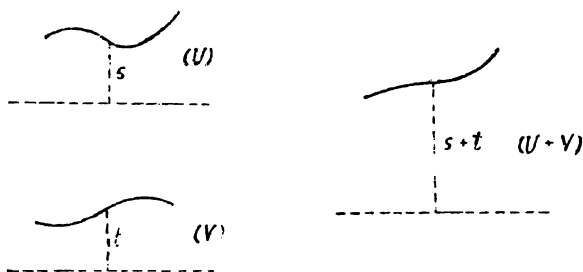
دوباره به شکل و جدول برمی‌گردیم و موقعیت $L = J + K$ را روشن می‌کنیم. در آن جا، وزنه x نقطه B در موقعیت‌های J و K ، به ترتیب برابر ۱ و ۲ بود و موقعیت L ، خیلی ساده، با جمع $3 = 1 + 2$ معین می‌شد. یعنی، جابه‌جایی نقطه B در موقعیت L ، به طور کامل، از روی جابه‌جایی‌های در موقعیت‌های J ، K معین می‌شد. ماهیچ نیازی به اطلاع از جابه‌جایی‌های نقطه‌های دیگر نداشتیم. این حقیقت، در مورد هر نقطه‌ای که روی سیم تثبیت شده باشد، درست است. در شکل ۲۹، بخشی از سیم، در سه موقعیت مختلف



شکل ۲۹

U و V نشان داده شده است. از آن جاکه در موقعیت های U و V جابه جایی E را به ترتیب با s و t نشان داده ایم، در موقعیت $U+V$ ، این جا به جایی با $s+t$ مشخص شده است. موقعیت نقطه های G و F ، E ، D ، C از نمودار $U+V$ ، و به طور کلی هر نقطه دیگر این نمودار هم، به همین ترتیب معین می شود.

در ضمن یادآوری می کنیم که این شیوه جمع کردن، خیلی مقدماتی است و کاربرد گسترده ای دارد. مثلاً، شرکتی را در نظر بگیرید که به فروش چکمه و پوتین مشغول است و ماه به ماه، کالای فروش رفته خود را ثبت می کند



شکل ۳۵

آن وقت، نمودار U می تواند معرف فروش ماهیانه چکمه و نمودار V نماینده فروش ماهیانه پوتین باشد. آن وقت، نمودار $U+V$ ، میزان فروش کل کالا را مشخص می کند. اگر در ماه مارس، s جفت چکمه و t جفت پوتین فروخته باشد، تمام فروش او در این ماه، $s+t$ جفت کفش خواهد بود. در بالای گزارش ۱۲ ورودی وجود دارد و هر یک از نمودارها معرف یک بردار دوازده بعدی است. ولی من در این باره تردید دارم که اطلاع از همه این موضوع های ظریف بتواند کمکی به شکوفایی این شرکت بکند.

اگر تعداد نقطه هایی که روی سیم مشخص کرده ایم، خیلی زیاد شود، آن وقت تصویر ما، منحنی های هموار را به خاطر خواهد آورد. این مطلب به ما تلقین می کند که، این شیوه جمع کردن را می توان درباره هر نموداری، و لوازمی که به صورت خط شکسته نباشد، به کاربرد. درستی این عمل را می توان به سادگی ثابت کرد. اگر شکستگی ها و پیچ های شکل ۲۹ را هموار کنیم،

شکل ۳۰ به دست می آید. s و t ، رامثل قبل، ارتفاع نقطه E در نمودارهای U و V می گیریم. با جمع کردن آنها، ارتفاع $t+s$ ، برای نقطه نظیر آنها روی نمودار $U+V$ به دست می آید.

به این ترتیب، اگر دو نمودار به ماداده باشند، بدون این که از معادله آنها اطلاع داشته باشیم و بدون این که بدانیم این نمودارها را چگونه ساخته اند، می توانیم نمودار مجموع آنها را پیدا کنیم.

اگر نمودارهای U و V با دستورهایی ساده $y = x^3$ و $y = x^2$ داده شده باشند، آن وقت، نمودار $U+V$ با دستور $y = x^2 + x^3$ معین می شود.

در حالت کلی، وقتی که نمودارهای U و V با تابع های $y = f(x)$ و $y = g(x)$ داده شده باشند، نمودار $U+V$ ، متناظر است با تابع $y = f(x) + g(x)$.

قبلاً دیدیم که سه جمله ای های درجه دوم $ax^2 + bx + c$ و عبارت های مثلثاتی $asint + bcost$ را می توان، شبیه عبارت های «گره - سگ» جمع کرد و، بنابراین، در مقوله بردارها قرار دارند. به این ترتیب، به تعمیمی کاملاً گسترده رسیده ایم: همین محاسبه ها را در مورد هر نوعی از تابع ها، هر قدر هم که نامنظم باشند، می توان انجام داد. ضمناً، لزومی ندارد که دستور معرف تابع، ساده باشد؛ حتی می تواند چنین دستوری اصلاً وجود نداشته باشد. تابع ها می توانند به وسیله نمودارهایی که با دست رسم شده اند، داده شده باشند. در این صورت هم، به مقوله بردارها تعلق دارند و می توانیم مجموع

$$\begin{array}{r} 2f(x) + 3\varphi(x) \\ 4f(x) + 5\varphi(x) \\ \hline 6f(x) + 8\varphi(x) \end{array}$$

را، درست مثل حالتی که $f(x)$ به معنای گره و $\varphi(x)$ به معنای سگ باشد، به دست آوریم.

بنابراین، تابع ها را هم می توان همچون بردارها مورد بررسی قرار داد. خیلی ها ممکن است از این مطلب تعجب کنند، زیرا در مورد مفهوم های تابع و بردار، دو تصور مختلف داشته ایم. ما تابع را با نمودارهایی از نوع

$2x^2 = y$ مربوط می‌دانیم، درحالی که به نشانه‌هایی مربوط می‌شود که مثلاً سرعت باد را نشان می‌دهد و معلوم می‌کند که، فی‌المثل، درجه‌ت شمال شرقی و با سرعت ۲۰ کیلومتر در ساعت حرکت می‌کند. باهمه این‌ها با توضیح‌هایی که در این جا دیدیم، معلوم می‌شود که نظریهٔ بردارها، می‌تواند در مورد تابع‌ها هم، آگاهی‌هایی به ما بدهد.

این اندیشه، ممکن است در ابتدا ما را دچار حیرتی مسرت‌بار کند، ولی بعد، نوعی دلسردی پیش می‌آید، زیرا باهمهٔ تازگی و فریبندگی آن، نمی‌توان تنها به یاری این يك اندیشه، به نتیجهٔ جالبی رسید. باید هرچه زودتر به کار پرداخت و، با به دست آوردن نتیجه‌هایی کاملاً مشخص دربارهٔ تابع‌ها، ارزش واقعی این اندیشه را نشان داد. در چنین صورتی است که حق داریم اعلام کنیم: «ببینید، من موفق شده‌ام به این نتیجه‌گیری‌ها برسم، زیرا می‌دانستم که تابع‌ها را می‌توان همچون بردارها، مورد مطالعه قرار داد». ولی، اگر تصور ما در مرحلهٔ فعلی باقی بماند، هیچ گونه پیشرفتی پیدا نمی‌کند. بردارها، مفهوم‌های ساده‌ای هستند، که در بارهٔ آن‌ها، خیلی کم می‌توان چیزهای جالبی پیدا کرد. کار ما در مورد بردارها، براساس جبر عبارت‌های ساده‌ای از نوع $3c + 4d$ قرار دارد و، برای آن، به روش بغرنجی از ریاضیات، نیاز نداریم. برای این که بتوانیم، به نتیجه‌های جالب‌تری برسیم، هنوز به اندیشهٔ بیشتری نیازمندیم.

در پایان یادآوری می‌کنیم که، در این مرحله، فضای برداری و فضای خطی، برای ما دو مفهوم مترادف‌اند. مثلاً، وقتی دربارهٔ سه جمله‌ای $2x + 2x^2 + 3$ صحبت می‌کنیم، می‌توانیم آن را برداری از فضای برداری همهٔ سه جمله‌ای‌های درجهٔ دوم و یا عضوی (یا نقطه‌ای) از فضای خطی شامل همهٔ سه جمله‌ای‌های درجه دوم بدانیم. در واقع، می‌توان از یکی از این اصطلاح‌ها صرف نظر کرد، ولی هر دو اصطلاح در ادبیات ریاضی وجود دارد و گاهی بهتر است از هر دوی آن‌ها استفاده کنیم.

۳

نگاشتها و ماتریس‌ها

درزندگی روزانه به موردهایی برمی‌خوریم که، در آن‌ها، چیزهایی به وجود می‌آیند، تغییر شکل می‌دهند و یا جای خود را با هم عوض می‌کنند. يك تن زغال در کوره گازسوز، به مقدار معینی كك، آمونیوم، گوگرد، بنزین و قیر تبدیل می‌شود. پول خردی که به دستگاه اتومات می‌اندازیم، يك بسته شکلات به ما «برمی‌گرداند». مقدار معینی آهن، مس، لاستیک و چیزهای دیگر، همراه با نیروی انسانی، تبدیل به اتومبیل می‌شود.

این روندها را نمی‌توان برگرداند و یا تجدید کرد؛ آن‌ها، یکبار برای همیشه، انجام می‌گیرند. وقتی زغال را بسوزانید، با مراجعه به كك، آمونیوم و دیگر ترکیب‌های آن، نمی‌توانید دوباره آن را به دست آورید. وقتی که شکلات را از دستگاه گرفته‌اید، دیگر نمی‌توانید آن را به دستگاه برگردانید و پول خود را پس بگیرید. کارخانه اتومبیل‌سازی، ماشین‌های جدید خود را روی نقاله نمی‌گذارد، به امید این که به ماشین‌های بهرینج‌تری دست یابد.

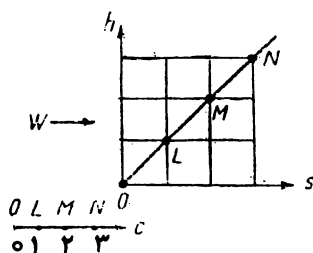
ولی خیلی از جریان‌ها هم پیدا می‌شود که امکان بازگشت و یا تجدید ساختمان در آن‌ها وجود دارد. می‌توان قسمتی از سپرده روزانه به بانک را به حساب سهم همان شرکت سهامی گذاشت و، به موقع، سود آن را دریافت کرد. با پرورش دام، می‌توان بچه‌های آن‌ها را فروخت و یا به تعداد آن‌ها افزود. از بعضی کارخانه‌ها، می‌توان برای ساختن کارخانه‌های تازه دیگری استفاده کرد.

همه این روندها - چه آن‌ها که یکبار برای همیشه جریان می‌یابند و چه آن‌ها که می‌توانند تجدید شوند و ادامه یابند - دارای قانون‌مندی ریاضی

معینی هستند. اینها همان قانون‌مندی‌های ساده‌ای هستند که در فصل اول، بدون تکیه بر ترکیب‌های شیمیایی، یا بخش‌های مختلف اتومبیل یا دام، مورد بررسی قرار گرفت. ولی باید یادآوری کرد که کاربردهای این نظریهٔ تفر بخش ریاضی، به مراتب، از محدودهٔ اقتصاد و یا تولید صنعتی و کشاورزی فراتر می‌رود.

بانك جانوران

جامعه‌ای غنی را تصور می‌کنیم، که ما آن را به زبان جانوران بیان می‌کنیم. اگر یک گربه در بانك U بگذارد، بعد از یک سال یک گوسفند به شما تحویل می‌دهند. این حقیقت را می‌توان به صورت $U: c \rightarrow s$ نوشت که معنای آن این است: «در طرح U ، به ازای هر گربه یک گوسفند می‌دهند». در بانك V ، به ازای هر گربه، بعد از یک سال، یک اسب دریافت می‌کنید، یا $V: c \rightarrow h$. بانك W سخاوتمندتر است؛ در آن جا، به ازای یک گربه، هم گوسفند می‌دهند



شکل ۳۹

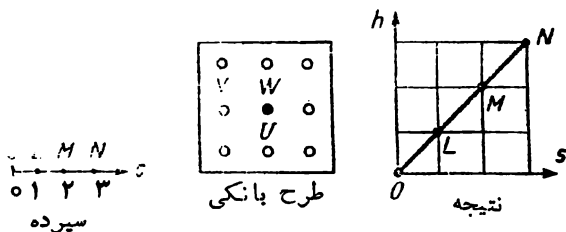
و هم اسب، یعنی $W: c \rightarrow s + h$. روشن است که طرح W با طرح‌های U و V ، اگر آن‌ها را با هم بگیریم، هم ارزش است. آن را به صورت $W = U + V$ نشان می‌دهیم.

به این ترتیب، نه تنها می‌توانیم طرح بانك‌ها را با هم جمع کنیم، بلکه می‌توانیم هر طرح را در عددی هم ضرب کنیم. اگر طرح U چنان است که $c \rightarrow s$ ، می‌پذیریم که $3U$ ، سه بار بهتر از آن است، یعنی در آن $3s \rightarrow c$. به همین ترتیب، طرح $5V$ به این معناست که $5h \rightarrow c$ ، زیرا $V: c \rightarrow h$. بالاخره می‌توانیم طرحی با ارزش $3U$ و $5V$ با هم درست کنیم؛ آن را به صورت

$3U + 5V$ می نویسیم که معنای آن چنین است: $c \rightarrow 3s + 5h$.

اگر فرض را بر این بگیریم که بانک‌ها، تنها گربه قبول می‌کنند و، در برابر آن، گوسفند و اسب می‌دهند، آن وقت طبق این قاعده، می‌توان هر طرح بانکی را نوشت. اگر در یکی از طرح‌ها، به ازای گربه، a گوسفند و b اسب داده شود، این طرح همان $aU + bV$ است. همه طرح‌های ممکن از این نوع، یک فضای خطی دوبعدی (تشکیل می‌دهند و همه آن‌ها را می‌توان به صورت $aU + bV$ نوشت.

عمل طرح بانکی را می‌توان به صورت هندسی مجسم کرد. در شکل ۳۱، طرح $c \rightarrow s + h$: W نشان داده شده است. نقطه‌های N, M, L, O روی خط راست سمت چپ، سپرده‌های ممکن را نشان می‌دهند که با تعداد ۵، ۱، ۲، ۳ گربه بیان شده است. همان نقطه‌های N, M, L, O در سمت راست، معرف درآمد از این سپرده‌ها هستند. ولی روی این شکل، همه چیز نشان داده نشده است. همان طور که دیدیم، همه طرح‌های ممکن بانکی تشکیل یک فضای دوبعدی می‌دهند. طرح خاص W ، به دلخواه، از این فضا انتخاب شده است. اگر بخواهیم وضع کلی را به طور کامل نشان دهیم، به وسیله‌ای نیاز داریم که در شکل ۳۲ نشان داده شده است. در این جا، تخته‌ای وجود دارد که شاسی‌های روی آن، با U, V, W و دیگر طرح‌های بانکی متناظرند.



شکل ۳۲

اگر روی شاسی سیاه فشار دهیم، نقطه‌های N, M, L, O - آن‌طور که در طرف راست نشان داده است - روی پرده ظاهر می‌شوند. و اگر روی شاسی دیگری، مثلاً U ، فشار دهیم، نقطه‌های متناظر با این شاسی، روی پرده پدیدار می‌شود.

نشانه گذاری $s \rightarrow c: U$ را، می‌توان با نشانه دیگری عوض کرد: $Uc = s$ ، که معنای آن چنین است: «روند بانکی در مورد c ، منجر به s می‌شود». به همین ترتیب $V: c \rightarrow h$ و $W: c \rightarrow s+h$ را، به ترتیب، به این صورت می‌توان نوشت: $Vc = h$ و $Wc = s+h$. برابری $W = U+V$ ، اجازه می‌دهد بنویسیم: $Wc = (U+V)c$. و اگر معنای این نشانه گذاری‌ها را فراموش کنیم و، طبق عادت، با قاعدهٔ جبر مقدماتی، کار را ادامه دهیم:

$$Wc = (U+V)c = Uc + Vc = s + h$$

به نتیجه‌ای کاملاً درست می‌رسیم. با وجودی که معنای مفهومی U ، V ، W ، c ، s ، h ، که در این جا مورد بحث ماست، با معنایی که در جبر مقدماتی، برای آن‌ها، به کار می‌رود (در جبر مقدماتی، این حرف‌ها به معنای عدد هستند)، به کلی متفاوت است، عمل‌های صوری به قوت خود باقی می‌مانند.

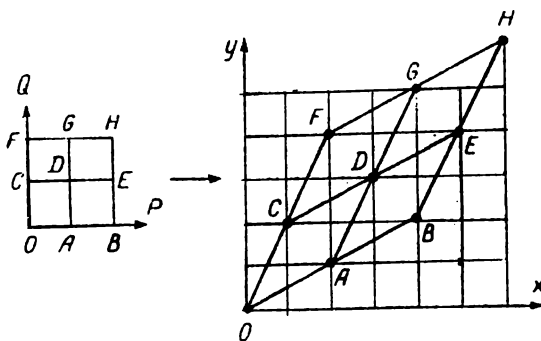
در بارهٔ بعدها

روی شکل ۳۱ دیدیم که، مطابق طرح $W: c \rightarrow s+h$ ، نقطه‌های O ، L ، M ، N از خط راست، متناظر با نقطه‌هایی به همین نام از صفحهٔ کاغذ شطرنجی بودند. می‌توانیم بگوییم، خط راست بر صفحهٔ کاغذ، تصویر (یا نگاشته) شده است. بنابراین، عمل W ، نگاشت (یا تصویر) فضای يك بعدی («خط راست گربه‌ها») را بر فضای دو بعدی («صفحهٔ گوسفند واسب»)، محقق ساخته است. ممکن است گمان کنید که نمی‌توان هر فضایی را بر فضای دیگر تصویر کرد. ولی در واقع، این طور نیست: اگر دو فضای برداری داشته باشید، همیشه می‌توانید، به کمک طرح بانکی، نگاشت یکی را برد دیگری پیدا کنید. مثلاً اگر طرح بانکی، گربه را به گوسفند، سگ را به ۲ گوسفند و فیل را به ۱۰ گوسفند تبدیل کند، در واقع، نگاشت فضای سه بعدی بر فضای يك بعدی است. در این جا، سپرده با سه عدد معین می‌شود: x گربه، y سگ، z فیل؛ ولی نتیجه، بایک عدد بیان می‌شود: n گوسفند و، در واقع، $n = x + 2y + 10z$. ضمناً، در فضای سه بعدی نقطه‌هایی وجود دارد که، نگاشت آن‌ها در فضای يك بعدی، تنها يك نقطه است. مثلاً ۲۰ گوسفند را می‌توان از سپردهٔ ۲ فیل، یا ۱۰ سگ، یا ۲۰ گربه و یا ترکیبی از ۶ گربه،

دوسگ و ۱ فیل به دست آورد.

وقتی که حساب مغازه را می پردازید، در واقع هر بار، بانگاشت يك فضای چند بعدی بر فضای يك بعدی سروکار دارید. فرض کنید در مغازه، مثلاً ۱۰۰ نوع مختلف کالا وجود داشته باشد. شما تصمیم می گیرید که از هر نوع کالا چقدر لازم دارید؛ بی تردید، خیلی از کالاها را لازم ندارید، و از بعضی دیگر، چند تا انتخاب می کنید. بنابراین، برای این که خرید خود را توضیح دهید، به ۱۰۰ عدد نیاز دارید، به زبان دیگر، خرید را می توانید با نقطه ای از يك فضای صد بعدی، متناظر کنید. در حالی که پرداخت شما، هر قدر که زیاد باشد، بایك اصطلاح، یعنی پول، بیان می شود؛ پرداخت شما، تنها بایك عدد، یعنی تعداد پنس ها، اندازه گیری می شود.

اگر یکبار به نظر تان برسد که با هواپیما مسافرت کنید، آن وقت، نه تنها ارزش کلی خرید خود، بلکه وزن آن را هم باید بدانید. در این حالت، هر خرید خود را، که با ۱۰۰ عدد معین می شود، با دو عدد مربوط کرده اید: قیمت خرید و وزن آن. در این جا، در واقع، با نگاشت يك فضای صد بعدی بر فضای دو بعدی سروکار دارید.



شکل ۳۳

مثالی را که قبلاً دربارهٔ سیم کشیده شده آوردیم (شکل ۲۶)، می توان به عنوان نگاشت يك فضای دو بعدی بر فضای دو بعدی دیگر در نظر گرفت،

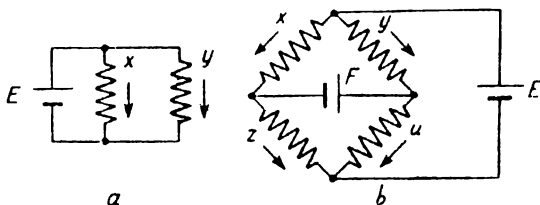
۱. اگر به زبان ریاضی صحبت کنیم، می توان گفت که نگاشت، در این حالت در تناظر يك به يك قرار ندارد. م.

زیرامی توان وزنه‌های P و Q را انتخاب کرد که در نقطه‌های B و C آویخته شده‌اند. این جابه‌جایی را می‌توان، در واقع، باین دومعادله نشان داد:

$$x = 2P + Q$$

$$y = P + 2Q$$

این نگاشت، روی شکل ۳۳ نشان داده شده است. نگاشت‌ها رامی‌توان، به سادگی، روی طرح مدارهای الکتریکی روشن کرد. روی شکل ۳۴ - a ،



شکل ۳۴

مداری نشان داده شده است که، در آن، منبع جریان E ، شدت جریان x را در یک رسانا و شدت جریان y را در رسانای دیگر، معین می‌کند، به نحوی که $E \rightarrow (x, y)$. و این عبارت است از نگاشت یک فضای یک بعدی بر فضای دوبعدی. در شکل ۳۴ - b ، دو منبع جریان E و F و چهار رسانا داریم، که در هر کدام از آن‌ها، بسته به مقاومتی که دارند، شدت جریان‌های x ، y ، z ، u برقرار می‌شود. بنابراین، در این جا، بانگاشت یک فضای دوبعدی بر فضای چهاربعدی سروکار داریم.

نوع خاصی از نگاشت، به مقاومت‌هایی مربوط می‌شود که برای بخش‌های مدار انتخاب کرده‌ایم. در این جا هم، مثل مورد سپرده‌ها، با سه جزء تشکیل دهنده سروکار داریم. نیروی محرک الکتریکی منبع جریان در مدار، متناظر با سپرده؛ مقاومت‌ها، متناظر با طرح بانکی؛ و شدت جریان در این مقاومت‌ها، متناظر با درآمد سپرده است.

نگاشت‌های مرکب

به موقعیت زیر توجه کنید. در یک کارخانه تولید مواد نفتی، دو نوع ماده خام داریم. یک گالن ماده خام نوع اول، a گالن بنزین سوپر، b گالن

بنزین معمولی و c گالن بنزین نامرغوب می‌دهد. از یک گالون ماده خام نوع دوم، به ترتیب، d ، e و f گالن بنزین سوپر، معمولی و نامرغوب به دست می‌آید. بنابراین، اگر x گالن ماده خام نوع اول و y گالن ماده خام نوع دوم را تصفیه کنیم، به ترتیب، u ، v و w گالن بنزین سوپر، معمولی و نامرغوب حاصل می‌شود و داریم:

$$\begin{cases} u = ax + dy \\ v = bx + ey \\ w = cx + fy \end{cases} \quad (1)$$

اگر بنزین‌ها را، به ترتیب، هر گالون α ، β و γ پنس بفروشیم، کل دریافت برابر t پنس خواهد شد، که در آن

$$t = \alpha u + \beta v + \gamma w \quad (2)$$

بنابراین، بادر دست داشتن x و y ، می‌توانیم u و v و w را پیدا کنیم و، به کمک آن‌ها، t را به دست آوریم.

به این ترتیب، بازو نگاشت P و S سروکار داریم، که متناظر با تولید و فروش‌اند. P ، ماده خام را به بنزین مربوط می‌کند:

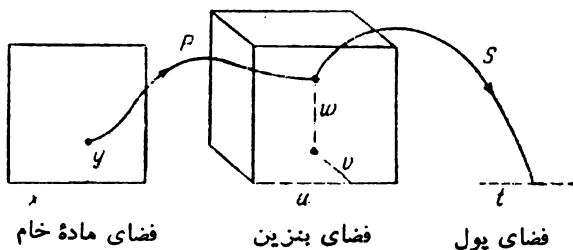
$$P: (x, y) \rightarrow (u, v, w)$$

و S ، بنزین را به مبلغ کل دریافتی از بابت فروش پیوند می‌دهد:

$$S: (u, v, w) \rightarrow t$$

این بستگی‌ها را می‌توانستیم این‌طور نشان دهیم: $t = S(u, v, w)$ و $(u, v, w) = P(x, y)$. سپس، تبدیل به‌طور طبیعی انجام می‌گیرد و به دست می‌آید: $t = SP(x, y)$. به این ترتیب، SP نمادی است که جریان را توضیح می‌دهد: پول $\rightarrow$ ماده خام.

ببینیم در این‌جا، از نظر تعداد بعدها، در چه وضعی هستیم: ماده خامی را که به کارخانه وارد می‌شود، با دو عدد x و y بیان کردیم. بنابراین، «فضای ماده خام»، دو بعدی است. از ماده خام، سه نوع بنزین به دست می‌آید و، مقدار آن‌ها، با سه عدد u ، v و w معین می‌شود. یعنی «فضای بنزین حاصل» سه بعدی است. بالاخره، پول دریافتی، به خاطر فروش بنزین، با یک عدد بیان



شکل ۳۵

می‌شود، پس «فضای پول» يك بعدی است. این فضاها و نگاشت‌های مربوط به آن‌ها را در شکل ۳۵ نشان داده‌ایم.

به این نکته توجه کنیم که، نگاشت کامل، که پشت سرهم و در جهت پیکان‌ها، از ماده خام به پول، تحقق می‌یابد، عبارت است از نگاشت SP و نه PS . پول از فروش محصولی به دست می‌آید که خود از ماده خام حاصل شده است، و البته، محصول تولیدی، نتیجه‌ای از فروش ماده خام نیست. استدلال جبری که در بالا آوردیم، کوششی در جهت نزدیک شدن به این علامت‌گذاری بود. «به این مناسبت باید گفت که، در ادبیات ریاضی، در این-باره عقیده‌های متفاوتی وجود دارد. نوشتن SP یا PS ، دقیقاً به یک توافق زبان‌شناسی مربوط است و گمان نمی‌رود دلیل دیگری برای انتخاب این یا آن علامت‌گذاری ارائه داد.»

ضرب ماتریس‌ها^۱

نگاشت‌های P و S ، با معادله‌های (۱) و (۲) تعریف می‌شوند. با قراردادن u, v, w از معادله (۱) به معادله (۲)، می‌توان به یک معادله رسید، که مستقیماً t را به x و y مربوط می‌کند و معرف نگاشت $t \rightarrow (x, y)$ است و به این صورت درمی‌آید:

۱. ماتریس به جدولی گفته می‌شود که از n سطر و m ستون تشکیل شده باشد، مثل

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 9 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

و غیره. م.

$$t = (\alpha a + \beta b + \gamma c)x + (\alpha d + \beta e + \gamma f)y \quad (3)$$

با استفاده از علامت گذاری های ماتریسی، می توان تاحدی نوشته ها را خلاصه کرد. با نتیجه های جالبی که در استدلال های بعدی از این علامت گذاری ها به دست می آوریم، دلیل وجود آن ها را برای ما روشن خواهد کرد، ولی تا آن زمان، تنها به عنوان نوعی خلاصه نویسی از معادله های (۱) و (۲) خواهند بود که با حذف u, v, w, x و y به دست می آیند.

اگر P را به صورت ماتریس بنویسیم، به این صورت ساده می شود:

$$P = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \quad (4)$$

این نوشته، ماهیت معادله (۱) را به ما می دهد، زیرا شش عدد f, e, d, c, b, a در همان مکان هایی قرار گرفته اند، که در معادله (۱) وجود داشتند. اگر بخواهیم، می توان به سادگی، از شکل ماتریسی (۴)، به شکل نخستین (۱) رسید.

به همین ترتیب، نوشته

$$S = (\alpha, \beta, \gamma) \quad (5)$$

ماهیت معادله (۲) را بیان می کند.

از معادله (۳) هم به دست می آید:

$$SP = (\alpha a + \beta b + \gamma c, \alpha d + \beta e + \gamma f) \quad (6)$$

به این ترتیب، عبارت SP را به دو طریق به دست آوردیم: آن را مستقیماً به صورت برابری (۶) نوشتیم و، ضمناً، می دانیم که SP نتیجه ای است از ترکیب نگاشت P ، که با ماتریس (۴) معین می شود، و نگاشت S ، که ماتریس (۵) معرف آن است. بنابراین، معادله (۶) را می توان، به طور کامل، به صورت ماتریسی نوشت. برای این منظور، کافی است در سمت چپ معادله (۶)، به جای S و P ، مقدارهای آن ها را، از معادله های (۵) و (۴) قرار دهیم. در نتیجه، به دست می آید:

$$(\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = (\alpha a + \beta b + \gamma c, \alpha d + \beta e + \gamma f) \quad (7)$$

از این برابری، می توان قاعده عملی ترکیب ماتریس ها را به دست آورد. اگر نخستین عبارت $\alpha a + \beta b + \gamma c$ در سمت راست برابری را در نظر بگیریم، متوجه می شویم که برای به دست آوردن آن، باید حرف های لاتینی a, b, c را از ستون اول ماتریس P انتخاب و به ترتیب در حرف های یونانی از سطر ماتریس S ضرب کنیم. همین قانون مندی را در مورد عدد دوم $\alpha d + \beta e + \gamma f$ هم می بینیم: حرف های لاتینی ستون دوم P ، در حرف های یونانی سطر ماتریس S ضرب شده اند.

این قاعده، به اندازه کافی ساده است. اگر نگاشت ها را، به صورت ماتریسی آن ها در اختیار داشته باشیم، می توانیم، بدون این که خود را با نوشتن معادله های کامل آن ها و انجام تبدیل های مربوط به زحمت بیندازیم، ترکیب آن ها را پیدا کنیم. درستی این قاعده، از این جا روشن می شود که، از این راه هم، به همان نتیجه ناشی از استدلال کامل جبری می رسیم. مثلاً، اگر کسی نتواند ترکیب زیر را به روشنی پیش خود مجسم کند:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

می تواند خودش، قاعده آن را پیدا کند. ماتریس اول، با دو معادله بیان می شود:

$$\begin{cases} t = \alpha u + \beta v + \gamma w \\ s = \delta u + \varepsilon v + \zeta w \end{cases} \quad (8)$$

و ماتریس دوم، با این معادله ها:

$$\begin{cases} u = ax + dy \\ v = bx + ey \\ w = cx + fy \end{cases} \quad (9)$$

۱. همان طور که. بعداً هم، مؤلف یادآوری می کند، این عمل را، در ریاضیات، ضرب ماتریس ها می نامند. این عمل، با عمل مشابه خود درباره عددها، تفاوت جدی دارد. مثلاً، اگر حاصل ضرب AB از دو ماتریس A و B معین باشد، ممکن است حاصل ضرب BA معین نباشد؛ یا اگر، هم AB و هم BA معین باشند، ممکن است برابری $AB = BA$ برقرار نباشد. م.

اگر مقادیرهای u ، v ، w را از (۹) در (۸)، قرار دهیم، به معادله‌هایی می‌رسیم که t و s را بر حسب x و y می‌دهند:

$$\begin{aligned} t &= (\alpha a + \beta b + \gamma c)x + (\alpha d + \beta e + \gamma f)y \\ s &= (\delta a + \epsilon b + \zeta c)x + (\delta d + \epsilon e + \zeta f)y \end{aligned} \quad (10)$$

اکنون، اگر در معادله‌های (۱۰)، x و y را کنار بگذاریم، چهار عدد باقی‌مانده ماتریس مجهول را به‌ما می‌دهند. ضمناً قاعده ترکیب ماتریس‌ها، خود به‌این پرسش هم پاسخ می‌دهد که: ماتریس مجهول، چه شکل و چه اندازه‌ای باید داشته باشد؟ در حالت مفروض، معادله‌های (۱۰) نشان می‌دهند که، این ماتریس، باید دوسطر و دوستون داشته باشد، یعنی به‌صورتی غیر از صورت ماتریس‌های اولیه است.

می‌توان مسأله‌ای از ترکیب ماتریس‌ها داد که هیچ‌گونه مفهومی نداشته باشد. به‌عنوان نمونه، ترکیب ماتریس‌های زیر را مطرح می‌کنیم:

$$(\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad (11)$$

ماتریس اول، متناظر با معادله $t = \alpha u + \beta v + \gamma w$ و ماتریس دوم متناظر با دستگاه معادله‌های زیر است:

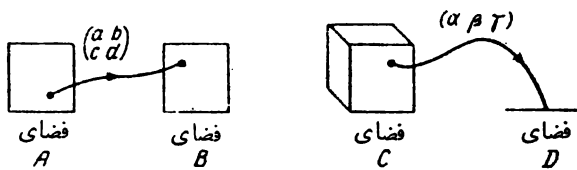
$$u = ax + cy$$

$$v = bx + dy$$

تلاش برای بیان t بر حسب x و y ، با قرار دادن u و v از دستگاه اخیر در معادله قبلی، به‌جایی نمی‌رسد، زیرا مقدار w را نداریم. یعنی این مسأله، معنایی ندارد. این «بی‌معنا بودن»، ضمن استفاده از قاعده عملی ترکیب ماتریس‌ها، یعنی تشکیل مجموعی از حاصل ضرب‌های عنصرهای سطرهای عنصرهای نظیرستون‌ها، هم‌روشن می‌شود. وقتی که بنابراین قاعده‌آغاز کنیم، به‌عنوان نخستین عضو، ماتریس مجهول به‌دست می‌آید: $\alpha a + \beta b + \dots$ ؛ در این‌جا به‌بن‌بست می‌رسیم: حرف یونانی γ را نمی‌توان در چیزی ضرب کرد، زیرا حرف‌های لاتینی تمام شده‌اند. طبیعی است که استفاده از یک قاعده، برای پاسخ گفتن به یک پرسش بی‌معنی، کاری عاقلانه نیست.

این مسأله را، از دیدگاه هندسی هم، می‌توان بررسی کرد. در شکل

۳۵، می‌توانستیم نگاشت SP را تشکیل دهیم، زیرا هر نقطه از «فضای ماده»



شکل ۳۶

خام»، با نگاشت P ، به «فضای بنزین» فرستاده می‌شود و، از آن‌جا، با نگاشت S ، به «فضای پول» می‌رود. چنین ترکیبی از نگاشت‌ها، تنها وقتی ممکن است که یک فضای مشترک بینابینی وجود داشته باشد (که در این‌جا، عبارت بود از «فضای بنزین»). و این، به نوبه خود، یک شرط اضافی، برای امکان ترکیب ماتریس‌ها در برابر ما می‌گذارد. نتیجه عمل اول باید طوری باشد که بتوان عمل دوم را، در مورد آن، به کاربرد. این شرط، در مورد مسأله بی‌معنی، رعایت نشده است (شکل ۳۶ را ببینید). عمل $(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix})$ ، فضای دوبعدی A را بر فضای دو بعدی B تصویر می‌کند. عمل (α, β, γ) ، فضای سه بعدی C را بر فضای یک بعدی D تصویر می‌کند. بنابراین، نمی‌توان از فضای A به فضای D رسید.

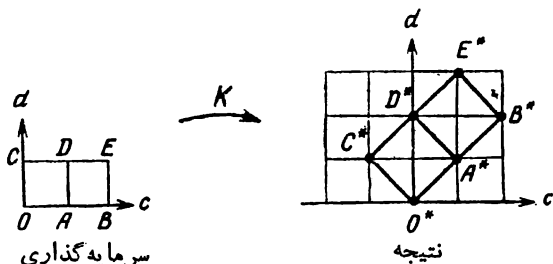
تبدیل‌های خطی فضا

عمل‌هایی که تا این‌جا مورد بررسی قرار داده‌ایم، قابل تکرار نیستند؛ حتماً باید فضایی را بر فضای دیگری تصویر کرد. ضمناً، فضای حاصل هم، با فضای اولیه متفاوت است. گریه به سگ تبدیل می‌شود، زغال به کک، پوند به اینچ و نفت به پول. این گونه نگاشت‌ها، چه در زندگی و چه در ریاضیات، اهمیت زیادی دارند؛ ولی، برای جبر، مناسب نیستند. برای عمل‌هایی که قابل تکرار نیستند، نمی‌توان در باره PP و یا، به طور ساده، درباره P^2 صحبت کرد. در بعضی موردها می‌توانیم نگاشت‌های مختلفی از نوع SP را ترکیب کنیم، ولی در بعضی موردهای دیگر، نمی‌توانیم. اگر با زمینه‌هایی سروکار داشته باشیم که بتوان نگاشت یک فضا را

برخودش هم به دست آورد، آزادی بیشتری پیدا می کنیم. در چنین موردی، امکان ترکیب هر دو عملی، ممکن خواهد شد و، همان طور که خواهیم دید، می توانیم هر عملی را به توان برسانیم و، در نتیجه، از عبارتهایی به صورت SP, P^2, P^3 و S^2P استفاده کنیم و مثلاً شکل $P^3 + 5P^2 + 7S^2P + 2SP$ را تشکیل دهیم. در واقع، در چنین صورتی، خواهیم توانست بخش بزرگتری از روشی را که در جبر مقدماتی وجود دارد، مورد استفاده قرار دهیم. در این فصل خواهیم دید که، این وضع، چگونه روی می دهد و کمی بعد، با کاربردهای این روش آشنا خواهیم شد.

قبلاً، طرح «گره» — گوسفند را مورد مطالعه قرار دادیم؛ در این جا، طرح هایی را مطرح می کنیم، که در آن ها، سرمایه گذاری گره ها و سگ ها، دوباره به برگشت گره ها و سگ ها منجر شود که، به نوبه خود، بتوانند به عنوان سرمایه گذاری مجدد، مورد استفاده قرار گیرند. طرح بانکی K را در نظر می گیریم، که در آن $c \rightarrow c + d$ و $d \rightarrow d - c$. ممکن است، این طرح، از نظر روابط بانکی، بی معنا باشد، ولی دست کم، به یک نقشه هندسی جالب منجر می شود. نتیجه این عمل، در شکل ۳۷ نشان داده شده است. در سمت چپ، وضع نقطه های $A, B, C, \dots$ ، قبل از انجام عمل، و در سمت راست، وضع همین نقطه ها ($A^*, B^*, C^*, \dots$) بعد از انجام عمل، نشان داده شده است. توجه کنیم: نقطه های جدید؛ شبکه ای کاملاً شبیه شبکه نقطه های قبلی، تشکیل می دهند. و این، تصادفی نیست. ببینیم، نقطه های A^*, B^*, C^*, D^* و E^* را چگونه به دست آوردیم؟ بنا بر طرح K ، عبور از نقطه A به نقطه A^* ، به معنای آن است که، به ازای هر گره، یک گره و یک سگ به دست می آوریم. چون نقطه B ، عبارت است از سرمایه گذاری ۲ گره، بنابراین، نتیجه B^* باید دو برابر باشد، یعنی $B^* = 2A^*$. و، روی شکل، به معنای آن است که نقطه B^* با نقطه های A^* و O^* روی یک خط راست قرار دارد، ولی فاصله B^* از O^* ، دو برابر فاصله A^* از O^*

۱. به ازای هر گره، یک گره و یک سگ به دست آید و، به ازای هر سگ، یک سگ از بانک «دریافت» و یک گره «پرداخت» شود. م.



شکل ۳۷

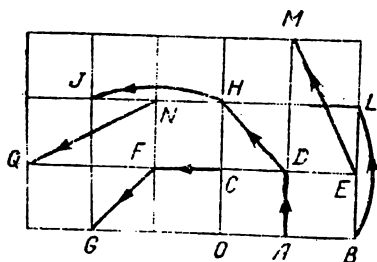
است.

به همین ترتیب، می توان روشن کرد که، اگر سرمایه گذاری برابر ۳، ۴...، گره باشد (که نقطه های متناظر آن، روی خط راست OA قرار دارند)، نتیجه حاصل از آن ها، نقطه هایی در امتداد نیم خط راست O^*A^* خواهد بود. نقطه ۳، به معنای آن است که، طبق طرح K ، يك سگ (نقطه C)، منجر به $d-c$ می شود. در مورد نقطه D ، باید گفت که، این نقطه، عبارت است از سرمایه گذاری يك گره و يك سگ. نتیجه، متناظر آن، یعنی نقطه D^* باید از جمع نتیجه سرمایه گذاری گره (نقطه A^*) و سرمایه گذاری سگ (نقطه C^*) به دست آید، یعنی $D^* = A^* + C^*$. و این، به معنای آن است که چهار ضلعی $A^*B^*C^*D^*$ يك متوازی الاضلاع است. به همین ترتیب، معلوم می شود که سرمایه گذاری E ، که در شکل سمت چپ به صورت مجموع سرمایه گذاری های B و C است (متوازی الاضلاع است)، در شکل سمت راست، متناظر است با $E^* = B^* + C^*$ و معرف رأس چهارم متوازی الاضلاعی است که سه رأس O^* ، B^* و C^* آن، داده شده است.

جالب است که، با معلوم بودن جای نقطه های A^* و C^* روی کاغذ شطرنجی می توانیم، بدون هیچ محاسبه ای و با ساختمانی ساده، جای بقیه نقطه ها را پیدا کنیم. این حقیقت هندسی به معنای آن است که، اگر از نتیجه سرمایه گذاری يك گره و يك سگ اطلاع داشته باشید، می توانید به نتیجه

سرمایه گذاری هر تعداد گربه و سگ، دسترسی داشته باشید.

در شکل ۳۷، برای این که محسوس تر باشد، سرمایه گذاری و نتیجه حاصل از آن را، در دو تصویر جداگانه نشان داده ایم، اگرچه هر دوی آن ها، در يك فضا هستند: فضای گربه و سگ. مثلاً، نقطه A^* ، معرف همان نقطه D است. بنابراین، به جای این که دو تصویر جداگانه برای موضع نخستین و جدید نقطه ها در نظر بگیریم، می توانیم خود را به يك تصویر محدود کنیم و، به کمک پیکان ها، نشان دهیم که هر نقطه به کدام نقطه دیگر منجر می شود. در این حالت (شکل ۳۸)، پیکانی که از A به D رفته است، به معنای آن است که، عمل K ، نقطه A را به نقطه D تبدیل می کند. از آن جا که عمل K می تواند در مورد هر نقطه فضا انجام شود، بنابراین، چنین پیکان هایی از



شکل ۳۸

هر نقطه صفحه آغاز می شوند و ما، قسمتی از آن را، در شکل ۳۸ نشان داده ایم. طبیعی است که، این پیکان ها، به صورت سیلابی به هم می پیوندند. وقتی که در جهت پیکان ها، مثلاً، از نقطه A آغاز به حرکت کنیم، می توانیم با عبور متوالی از نقطه های بینایی D ، H ، J ، همچنان حرکت خود را ادامه دهیم و به نقطه های دیگری، که در شکل مشخص نشده است، برسیم. هر گام این حرکت، متناظر است با انجام یکبار عمل K . سپرده A ، درآمد D را می دهد، سپرده مجدد D ، منجر به درآمد H می شود، H به نوبه خود، درآمد J را می دهد و غیره. بنابراین، نقطه های A ، D ، H و J را می توان با برابری های زیر به هم مربوط کرد:

$$D = KA, \quad H = KD, \quad J = KH$$

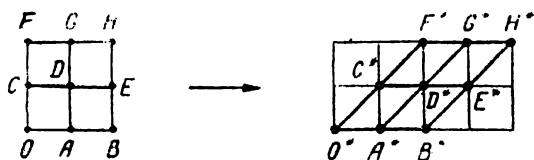
که از آن جا، به دست می آید.

$$H = KD = K(KA) = K^2 A, J = KH = K^2 A$$

یعنی نقطه J نتیجه ای است از سه بار استفاده از عمل K روی نقطه A .
به همین ترتیب: $G = K^2 C$.

نوشتن طرح بانکی برای K^2 ، خیلی ساده است. همان طور که دیدیم، K^2 ، نقطه A را به H و C را به G می فرستد. چون A عبارت است از c ، و C عبارت است از d ، بنابراین، عمل K^2 منجر می شود به $d \rightarrow 2c$ و $c \rightarrow d$. همین آگاهی کافی است تا بتوانیم نشان دهیم که هر نقطه به کجای می رود. K^2 را می توان روی کاغذ شطرنجی، به عنوان «دوران ۹۰ درجه و بامقیاس دوبرابر» تعبیر کرد. ولی قبلاً گفتیم که، برای نمایش فضای «گره-سگ»، لزومی ندارد که حتماً از کاغذی استفاده کنیم که با شبکه ای از مربع ها پوشانده شده باشد. عمل های K ، K^2 و K^3 را روی کاغذی هم که به صورت مورب خط کشی شده باشد، می توان به خوبی نشان داد (شکل ۱۱ را ببینید). ولی البته، در این حالت، تعبیر هندسی K^2 ، با آنچه هم اکنون گفتیم، تفاوت پیدا می کند.

باید از تصور نادرستی که ممکن است، ضمن مطالعه شکل ۳۷، به وجود آید، پرهیز کرد. در این شکل، مربع های $ABED$ و $OADC$ ، به ترتیب، به شکل های $O^*A^*D^*C^*$ و $A^*B^*E^*D^*$ تبدیل شده اند که باز هم مربع اند. ولی، اگر گمان کنیم که در طرح های بانکی، همیشه مربع به مربع تبدیل می شود، اشتباه کرده ایم.



شکل ۳۹

اولاً، طرح های بانکی با اصطلاح های فضای جانوران تعریف می شوند که، در آن ها، حتی نمی دانیم مربع یعنی چه. ما هیچ صحبتی در این باره که

مثلاً «گر به برسگ عمود است» یا این که «گر به، طولی برابر با طول سگ دارد»، نداشتیم. در واقع، به زبان فصل اول، ما تنها با هندسه آفینی سروکار داریم که، در آن، زاویه‌ها اندازه‌ای ندارند و طول پاره‌خط‌ها را تنها وقتی می‌توان با هم مقایسه کرد که روی خط‌های راستی با یک جهت قرار گرفته باشند. ثانیاً، اگر کسی از بین همه انواع کاغذهای خانه‌دار، کاغذ شطرنجی (یعنی کاغذ با خانه‌های مربعی شکل) را انتخاب کند و، آن وقت، نتیجه بگیرد که، هر طرح بانکی، نگاشت یک مربع، مربعی دیگر است، روشن است که دچار اشتباه شده است. ساده‌ترین طرحی که «مربع بودن» را حفظ نمی‌کند، عبارت است از $d \rightarrow c + d$ ، $c \rightarrow d$ که، نتیجه آن را در شکل ۳۹ می‌بینید.

از این به بعد، بیشتر به چنان طرح‌های بانکی علاقه‌مند خواهیم بود که شکل و اندازه مربع را ثابت نگه‌دارند (و آن‌ها را، تبدیل‌های متعامد می‌نامیم). در رابطه با این موضوع، بعداً، روی اصل موضوع‌های دیگری تکیه و آن‌ها را وارد در فضای «گر به - سگ» خواهیم کرد تا به صورت فضای اقلیدسی درآید. ولی اکنون، بحث خود را در چارچوب هندسه آفینی ادامه خواهیم داد، هندسه‌ای که نه از مربع اطلاع دارد و نه از زاویه قائمه. البته گاه به گاه، و تنها برای ملموس‌تر کردن مطلب، از کاغذ شطرنجی (یعنی کاغذی با شبکه خانه‌های مربعی) استفاده خواهیم کرد.

عمل گر (اوپراتور) اتحادی^۱

احتمالاً، ساده‌ترین عمل، چنان عملی است که همه چیز را به همان صورت نخستین خود نگه‌دارد. از این دیدگاه، ضمن نگاشت یک فضا بر فضای دیگر، مثلاً ضمن نگاشت «گر به ← گوسفند» یا «نفت ← پول»، این عمل ساده، نمی‌تواند جایی داشته باشد، زیرا هیچ انتخابی از گوسفندها، گر به نمی‌شود و پول هم با گالن نفت متفاوت است. ولی وقتی که، کار ما در یک فضا انجام می‌گیرد، طبیعی است اگر «اشیاء» در جای خود باقی بمانند، این عمل

۱. گرداننده یا عمل گر اتحادی، به ماتریس واحد گفته می‌شود. م.

را، عمل اتحادی گویند و با علامت I نشان می‌دهند. خاصیت این عمل، ضرب در 1 را به‌خاطر می‌آورد. اگر P عمل دلخواهی باشد، آن وقت داریم:

$$IP = PI = P$$

IP یعنی «عمل P را به‌کاربریم و سپس، همه‌چیز را به‌صورت خود نگه‌داریم» و PI یعنی «همه‌چیز را به‌صورت خود نگه‌داریم و سپس، عمل P را انجام دهیم». در هر دو حالت، نتیجه کار، همان P خواهد بود.

ممکن است نماد I ، بی‌فایده به نظر آید، زیرا متناظر با عملی است که، همه‌چیز را، بی‌تغییر نگه‌می‌دارد. ولی کوشش کنیم، به این پرسش پاسخ بدهیم: اگر U عبارت باشد از عمل‌های $c \rightarrow d$ ، $d \rightarrow c$ ، در باره عمل U^2 چه می‌توان گفت؟ عمل U عبارت است از تبدیل گربه به سگ و سگ به گربه. روشن است که اگر دوبار از این عمل استفاده کنیم، دوباره، به همان جایی که آغاز کرده بودیم، می‌رسیم. به زبان دیگر، نتیجه عمل U^2 ، شبیه آن است که اصلاً آن را به کار نبرده باشیم. بنابراین، $U^2 = 1$ بدون در اختیار داشتن نماد I ، نمی‌توانستیم این موضوع را بیان کنیم.

تمرین

اگر از کاغذ معمولی شطرنجی استفاده کنید، عمل U ، چه معنای هندسی دارد؟

محاسبه با ماتریس‌ها

کمی پیش از این، با روش تندنویسی ماتریسی آشنا شدیم و دیدیم که چگونه می‌توان SP را محاسبه کرد. جست‌وجوی SP ، از روی S و P ، معمولاً ضرب ماتریس‌ها نامیده می‌شود. تا این جا، روی نمونه طرح‌های بانکی، معنای $U+V$ و $5U$ را، برای حالت تبدیل‌های خطی، روشن کردیم. اگر U و V به‌صورت ماتریسی خود تعریف شده باشند، آن وقت، به کمک فرض‌هایی که در دست داریم، می‌توانیم ماتریس‌های $U+V$ و $5U$ را محاسبه کنیم. اگر بتوانیم استدلال مناسبی برای حالت کلی پیدا کنیم، آن وقت، از نتیجه آن می‌توان، به عنوان یک روش استاندارد و کلی، برای حل هر مسأله

مشابه آن، استفاده کرد.

فرض کنید، طرح بانکی U ، که بنابر آن x گربه و y سگ، به ترتیب، منجر به x^* گربه و y^* سگ می شود؛ پاسخ گوی معادله های زیر باشد:

$$x^* = ax + by$$

$$y^* = cx + dy$$

در این صورت، می توان طرح را به وسیله ماتریس $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ نشان داد.

شبیه همین طرح بانکی، V را هم متناظر با ماتریس $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ می گیریم.

طرح $U+V$ ، باید با طرح های U و V روی هم، معادل باشد. چون x گربه و y سگ، در طرح U ، $ax+by$ گربه و $cx+dy$ سگ و، در طرح V ، $\alpha x+\beta y$ گربه و $\gamma x+\delta y$ سگ می دهند، پس در طرح $U+V$ باید به اندازه مجموع آن ها، یعنی $[(a+\alpha)x+(b+\beta)y]$ گربه و $[(c+\gamma)x+(d+\delta)y]$ سگ بدهد. بنابراین، طرح $U+V$ متناظر با ماتریس زیر است:

$$U+V = \begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c+\gamma & d+\delta \end{pmatrix}$$

اگر به حرف های a و α ، b و β و غیره توجه کنیم، متوجه می شویم که با هم جمع شده اند.

قاعده تفریق ماتریس ها را می توان باتکیه به قاعده جمع به دست آورد. $U-V$ یعنی: «چه چیزی باید به ماتریس V اضافه کرد تا ماتریس U به دست آید؟» پاسخ به این پرسش روشن می کند که

$$U-V = \begin{pmatrix} a-\alpha & b-\beta \\ c-\gamma & d-\delta \end{pmatrix}$$

و اما درباره ΔU ؛ روشن است که ΔU عبارت است از پنج بار عمل U . به زبان دیگر، بنابر عمل، x گربه و y سگ، $\Delta ax+\Delta by$ گربه و $\Delta cx+\Delta dy$ سگ به ما می دهد، و در نتیجه

$$\Delta U = \begin{pmatrix} \Delta a & \Delta b \\ \Delta c & \Delta d \end{pmatrix}$$

برای حالت کلی، می‌توان، چه در استدلال و چه در نتیجه‌گیری، Δ را به k تبدیل کرد.

ماتریس‌های U و V ، نگاشت يك فضای دوبعدی را برخوردش، معین می‌کنند. ولی، همان‌طور که در فصل اول دیدیم، فضاهای خطی، هیچ حساسیتی نسبت به تعداد بعدهای خود ندارند؛ به نحوی که ماتریس‌های معرف تبدیل‌ها در فضای n بعدی که دارای n سطر و n ستون‌اند، به نتیجه‌ای کاملاً شبیه حالت $n=2$ می‌زنند. قاعده‌های مربوط به عمل با آن‌ها را می‌توان به سادگی و با استدلالی شبیه استدلال بالا، یا تکرار اثبات، مثلاً در مورد سه نوع جانور، به دست آورد.

حالا سعی می‌کنیم، ماتریسی را که متناظر با عمل گر اتحادی I می‌باشد پیدا کنیم. معادله‌های $x^* = x$ و $y^* = y$ را در نظر می‌گیریم. اگر این معادله‌ها را با صورت کلی آن‌ها، یعنی $x^* = ax + by$ و $y^* = cx + dy$ مقایسه کنیم، به سادگی می‌بینیم که، در این حالت داریم: $d=1, c=0$. یعنی: $b=0, a=1$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

يك ماتریس دیگر، یعنی ماتریس O را هم باید پیدا کنیم. عمل گر صفر O را می‌توان همچون طرح بانکی يك بانک ورشکسته تفسیر کرد. هر چه به بانک گذاشته شود، چیزی بر نمی‌گردد، یعنی $x^* = 0x + 0y$ ، $y^* = 0x + 0y$ و بنابراین

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

این عمل، در واقع، جانشینی برای صفر است. برای هر ماتریس U داریم:

$$U + O = O + U = U ; OU = UO = O$$

این رابطه‌ها را می‌توان با به کار بردن قاعده‌های محاسبه ماتریسی و یا با در نظر گرفتن طرح بانکی، مورد تحقیق قرارداد. مثلاً UO را می‌توان

این طور شرح داد: ابتدا اندوخته خود را در شرکتی می گذارید که، به صورت نامنتظری، ورشکست می شود و هیچ چیز به شما بر نمی گرداند؛ آن وقت، شما این «درآمد» خود را، که معادل صفر است، در طرح بانکی U می گذارید. روشن است که، در نتیجه کار، چیزی به دست نمی آورید.

ماتریس صفر، هر تعداد بعد که داشته باشد، تنها شامل عددهای صفر است.

بردار واحد I ، در فضای سه بعدی، به این صورت است:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

می گوئیم که: عددهای قطراصلی ماتریس واحد، برابر ۱ و بقیه عددهای آن برابر ۰ است.

وجود نماد O برای ماتریس صفر، این امکان را به وجود می آورد که رابطه بین ماتریس ها را، شبیه شکل معمولی جبر مقدماتی بنویسیم. مثلاً، معادله $U^2 = I$ را، که قبلاً به دست آورده بودیم، می توان به صورت $U^2 - I = O$ نوشت.

تمرین

۱. می دانیم: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

مطلوب است $A+B$ و تحقیق درستی رابطه $A+B = 2I+U$.

۲. A^2 و A^3 را پیدا کنید. ماتریس A^n چه صورتی دارد؟

۳. چه اختلافی بین A^2+I و $2A$ وجود دارد؟

۴. عبارت $B^2 - 2B + 1$ را ساده کنید.

۵. W را محاسبه کنید، به شرطی که $W = I + U$.

۶. نشان دهید که $W^2 = 2W$.

۷. اگر در معادله $W^2 = 2W$ ، به جای W قرار دهیم $I+U$ و با قاعده های جبر مقدماتی روی نمادها عمل کنیم، به معادله ای نسبت به U

می‌رسیم. این معادله را بنویسید. ماتریس U را مستقیماً در این معادله بگذارید و تحقیق کنید که، آیا در معادله صدق می‌کند!

۸. AB و BA را پیدا کنید. آیا باهم برابرند؟

۹. عبارت‌های $A^2 + AB + BA + B^2$ و $A^2 + 2AB + B^2$ را پیدا کنید. تحقیق کنید که: آیا هر کدام از آن‌ها با $(A+B)^2$ برابرند؟

۱۰. $I + 2U + U^2$ را پیدا کنید. آیا با $(I+U)^2$ برابر است؟

۱۱. فرض کنید $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، $C^2 - 5C - 2I$ را محاسبه کنید.

۱۲. فرض کنید $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. عبارت $D^2 - 3D - 2I$ را محاسبه کنید.

کنید.

۱۳. فرض کنید $E = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. ثابت کنید که به ازای مقداری از k

برابری $E^2 - 8E = kI$ برقرار است. k را پیدا کنید.

۱۴. فرض کنید $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. آیا معادله ساده‌ای وجود دارد که

$F^2 + 7I$ و F را به هم مربوط کند؟

۱۵. فرض کنید $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. G^2 و $2G + kI$ را محاسبه کنید

(روشن است که نماد k ، ضمن پاسخ به پرسش دوم، معین می‌شود). آیا می‌توان عدد k را طوری انتخاب کرد که این عبارت‌ها برابر شوند؟

۱۶. فرض کنید $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. آیا عددهای q و k را می‌توان

طوری انتخاب کرد که برابری $H^2 = qH + kI$ برقرار باشد؟

۱۷. این مسأله، به یک بررسی طولانی نیاز دارد. در پرسش‌های قبلی،

همه ماتریس‌ها در یک معادله درجه دوم صدق می‌کنند. آیا، به این مناسبت،

می‌توان گفت که، به طور کلی، هر ماتریس 2×2 در یک معادله درجه دوم

صدق می‌کند؟ این حکم را در مورد تعداد زیادی از حالت‌های خاص آزمایش

کنید و یا ماتریس کلی به صورت $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید.

۱۸. داریم:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ماتریس $P + 2Q + 3R + 4S$ را پیدا کنید.

۱۹. ماتریس $2P + Q + R + 4S$ را پیدا کنید.

۲۰. ماتریس G از تمرین ۱۵ را به صورت ترکیبی از ماتریس‌های

S و R, Q, P - که در تمرین‌های ۱۸ و ۱۹ داشتیم - نشان دهید. همین کار را برای ماتریس I انجام دهید.

۲۱. در تمرین ۱، ماتریس‌های A و B چنان‌اند که داریم:

$$A = P + Q + S, \quad B = P + R + S$$

اگر این عبارت‌ها را جمع کنیم، به $2P + Q + R + 2S$ می‌رسیم. آیا این مقدار با $A + B$ که در تمرین ۱ پیدا کردیم، تطبیق می‌کند؟

۲۲. آیا هر ماتریس 2×2 را می‌توان با فرمول $aP + bQ + cR + dS$

بیان کرد، که در آن، a, b, c, d ، عددند؟

۲۳. آیا ماتریس‌های 2×2 ، تشکیل یک فضای خطی می‌دهند؟ اگر

چنین است، چه بعدی دارد؟

۲۴. درباره فضای که از همه ماتریس‌های 3×3 تشکیل شده است،

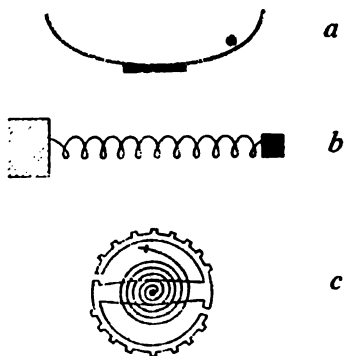
چه می‌توان گفت؟

۲۵. ضرب ماتریس‌های $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ را انجام دهید.

۴

سادگی پنهان

به سخن پوانکلاهِ ، ریاضیات عبارت است از دادن يك نام به چیزهای مختلف. بنابراین، منجر به صرفه جویی در فکر می شود، زیرا با مطالعه يك قانون مندی ریاضی، می توانیم آن را در مجموعه ای از گوناگون ترین موقعیت ها بشناسیم. در شکل ۴۰، سه روند کاملاً متفاوت نشان داده شده است. در



شکل ۴۰

حالت a ، نقطه مادی، يك حرکت نوسانی در طول يك منحنی هموار، در نزدیکی بخش پایینی آن، انجام می دهد؛ در حالت b ، جسم در انتهای فنر نوسان می کند؛ و بالاخره در حالت c ، رقاصك ساعت نشان داده شده است. از تجربه می دانیم که در رفتار این سه دستگاه، خیلی چیزهای مشترك وجود دارد از نظر ریاضی، این اشتراك رفتار، مثلاً در این جا ظاهر می شود که انرژی جنبشی

T و انرژی پتانسیل V ، در هر سه روند، دارای يك بیان هستند: $T = \frac{1}{2}mv^2$

و $V = \frac{1}{2} kx^2$. در این جا، v عبارت است از سرعت تغییر x . دستورها یکی است، ولی مفهوم نمادها متفاوت است. نماد m در حالت های a و b معرف جرم نوسان کننده و، در حالت c ، معرف گشتاور ماند (مان اینرسی) است. حرف a ، در حالت های a و b (البته، با جزئی اختلاف)، انحراف این جرم را از وضع تعادل خود نشان می دهد؛ در حالی که در حالت c ، x معرف زاویه ای است که رقاصک به اندازه آن می چرخد.

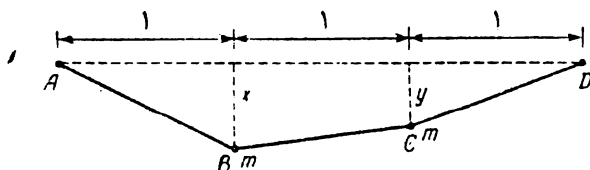
در دانش دینامیک، این حقیقت جالب وجود دارد: رفتار هردستگاهی را (به شرطی که از اصطکاک آزاد و با بعضی شرط های کاملاً قابل درک، سازگار باشد) می توان با دستوره های مربوط به انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل، به طور کامل، مشخص کرد. اگر در سه دستگاه فوق، k و m ، یک مقدار عددی داشته باشند، دستوره های T و V در این دستگاه ها، یکسان خواهند بود. و این، به معنای آن است که اگر دستگاه ها را باهم «به کار بیندازیم»، رفتار آن ها چنان با یکدیگر شبیه است که، با نگاه کردن به یکی از دستگاه ها، می توان توضیح داد که در دستگاه دیگر چه اتفاقی می افتد (در همه حالت ها، نوسان ها را به قدر کافی، کوچک می گیریم).

دستگاه a را، به عنوان ساده ترین آن ها، انتخاب می کنیم. انرژی پتانسیلی جرم، به نسبت ارتفاع آن، تحت تأثیر نیروی ثقل قرار دارد. در حالت a ، نقطه مادی روی یک منحنی جابه جا می شود که عبارت است از نمودار انرژی پتانسیلی نقطه مادی، یعنی نمودار $V = \frac{1}{2} kx^2$.

به خاطر بیاورید که چگونه، ضمن تاب خوردن، نفس آدم بند می آید. این حالت، در لحظه ای روی می دهد که انرژی پتانسیلی - که با اوج گرفتن تا بالاترین نقطه، کسب کرده اید - در نقطه پایین کاهش می یابد و به انرژی جنبشی تبدیل می شود. این وضع، می تواند طرح زنده ای از آن چه انرژی پتانسیلی و انرژی جنبشی نامیده می شود، به ما بدهد. اغلب می توانیم، با تصور حرکت یک جسم خیالی، روند فیزیکی را پیش خود مجسم کنیم. مثلاً تغییر انرژی پتانسیلی دستگاه را، می توان با حرکت یک شیء تصوری، روی

يك زمينه ناهموار، مجسم كرد.

حالا، از اين شيوه ، براي دستگاه سيمي كه نوسان مي كند، استفاده مي كنيم (شكل ۴۱). از اين جهت، اين دستگاه را انتخاب مي كنيم كه: اولاً شرح آن ساده و عيني است و ثانياً، رفتار آن نمونه اي است براي گروه گسترده اي از مساله هايي كه به روند نوساني مربوط اند و، ضمناً، بررسي آنها، هم از نظر علمي و هم از نظر فني، داراي ارزش است. در شكل ۴۱، سيمي را نشان داده ايم كه محكم كشيده شده و در نقطه هاي A و D استوار شده است. روي آن، در نقطه هاي B و C ، وزنه هاي كوچك m آويزان شده است كه، به طرف بالا و پايين، نوسان مي كنند. كَشش سيم را برابر ۱ مي گيريم.



شكل ۴۱

به سادگي مي توان نشان داد كه، انرژي پتانسيلى سيم، با دستور $V = x^2 - xy + y^2$ نشان داده مي شود^۱. بنابر اين، ارزش دارد كه دورنمايي متناظر با اين دستور بسازيم.

۱. انرژي پتانسيلى، در نتيجه كشيدن سيم به سمت وضع جديد به وجود مي آيد كه سيم مي خواهد، از آن خارج شود و طول نخستين خود را به دست آورد. طول هاي AB ، BC و CD را مي توان به كمك قضيه فيثاغورث پيدا كرد. اگر در نظر بگيريم كه، به ازاى مقدارهاي كوچك k ، برابري تقريبي $\sqrt{1+k} \approx 1 + \frac{1}{2}k$ برقرار است، به دست مي آيد:

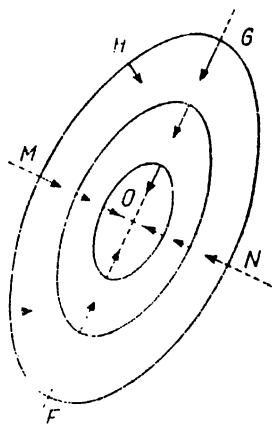
$$AB = 1 + \frac{1}{2}x^2 \quad BC = 1 + \frac{1}{2}(x-y)^2, \quad CD = 1 + \frac{1}{2}y^2$$

به زبان ديگر، پنج به اندازه $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}y^2$ و يا به اندازه $x^2 - xy + y^2$ كشيده مي شود.

فرض می‌کنیم، کاغذ شطرنجی را روی میز پهن کرده باشیم. در هر نقطه (x, y) ، سنجاقی به ارتفاع $x^2 - xy + y^2$ ، برابر با مقدار انرژی پتانسیلی در این نقطه، در نظر می‌گیریم. راس این سنجاق‌ها، سطحی را تشکیل می‌دهند حالا، سرپوشی مسی را تصور می‌کنیم که درست روی راس‌های این سنجاق‌ها قرار گرفته باشد؛ سطح سرپوش پاسخ گوی معادله $z = x^2 - xy + y^2$ است (از ضخامت سرپوش صرف نظر می‌کنیم). اکنون، اگر نقطه مادی روی سطح درونی سرپوش بغلطه، مقدار انرژی پتانسیلی آن در هر موضع (x, y) ، با دستور $V = x^2 - xy + y^2$ معین می‌شود.

به این ترتیب، مدلی از سطح به دست می‌آید که انرژی پتانسیلی دستگاه سیم در حال نوسان را تقلید می‌کند. خوشبختانه، دستور انرژی جنبشی هم قابل بازسازی است^۱. اکنون، با مشاهده حرکت ذره بر سطح سرپوش، می‌توانیم از نوسان سیم AD اطلاع پیدا کنیم.

در شکل ۴۲، طرح دوره‌های مرنی سطح سرپوش داده شده است.



شکل ۴۲

۱. در واقع، برای انرژی جنبشی داریم $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ ، که در آن،

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}, \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

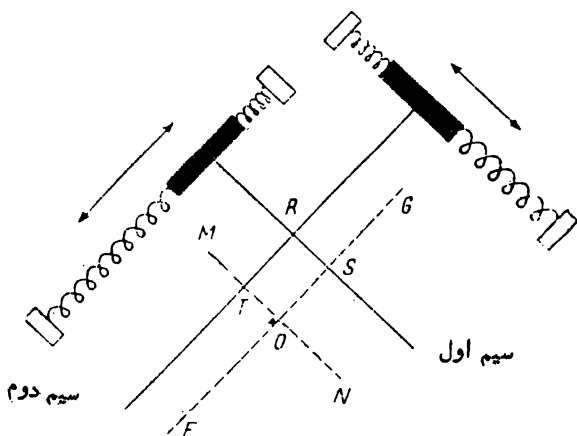
منحنی‌های دوره‌ای، بیضی‌هایی هستند که معادله‌های آن‌ها عبارت است از $x^2 - xy + y^2 = \text{const}$. شکل این سرپوش، قایقی را به‌خاطر می‌آورد که در جهت شمال شرقی یا جنوب غربی خود، شیبی ملایم‌تر و در جهت شمال غربی یا جنوب شرقی خود، شیبی به‌مراتب تندتر داشته باشد.

ذره مادی، در هر نقطه سرپوش قرار گیرد، احساس می‌کند که به طرف پایین کشیده می‌شود. جهت حرکت آن، با پیکان‌ها نشان داده شده است که بر منحنی دوره عمودند، حرکت ذره، وقتی که به‌طور آزاد از نقطه H رها شود، به اندازه کافی پیچیده است و به آسانی نمی‌توان، آن را مجسم کرد.

با وجود این، دو موضوع روی سطح سرپوش وجود دارد که موجب حرکت ساده‌ای برای ذره می‌شوند. این دو حرکت، عبارتند از حرکت از نقطه G و حرکت از نقطه M ، در جهت نقطه O . وقتی که ذره در نقطه G قرار گیرد، در جهت نقطه O به حرکت درمی‌آید، از نقطه O عبور می‌کند و روی شیب به طرف نقطه F بالا می‌رود. از آن‌جا برمی‌گردد و دوباره به نقطه G می‌رسد و، این حرکت نوسانی را، بی‌نهایت بار انجام می‌دهد (به شرطی که اصطکاکی وجود نداشته باشد).

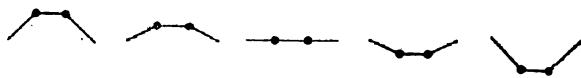
نوسان ذره در طول خط راست MON هم، به همین ترتیب خواهد بود. تنها، در این حالت، نوسان آن سریع‌تر است، زیرا خمیدگی سرپوش، در این جهت، بیشتر از خمیدگی آن در جهت GOF است.

جالب بودن این دو حرکت - حرکت در طول GOF و حرکت در طول MON - تنها به‌خاطر وجود دو حالت خاص و ساده حرکت نیست. اگر آن‌ها را ترکیب کنیم، می‌توانیم همه حرکت‌های ممکن ذره را به‌دست آوریم. در شکل ۴۳ نشان داده شده است که: چگونه می‌توان به این نتیجه رسید. سیمی به یک تیر فلزی محکم شده است، که می‌تواند در جهت از شمال شرقی به جنوب غربی نوسان کند. نوسان‌های آن، باید نوسان‌های ذره را، در سرپوش، در طول GOF بازسازی کند. سیم دوم هم به یک تیر فلزی دیگر محکم شده است که در جهت از شمال غربی به جنوب شرقی نوسان می‌کند. نوسان‌های تیر فلزی دوم، نوسان‌های ذره را روی سرپوش، در طول MON تقلید می‌کند آن وقت، نقطه برخورد سیم‌ها، نقطه R ، حرکت نقطه‌ای را می‌دهد که،



شکل ۴۳ -

به طور آزاد، روی سرپوش می غلطد. بررسی این مطلب جالب است که، چگونه می توان این دو حرکت ساده را در طول GOF و MON ، به کمک اصطلاح های مربوط به نوسان های سیم، تعبیر کرد. خط راست GOF ، دارای معادله $y = x$ است. بنابراین، نوسان در طول آن، با برابری x, y مشخص می شود. اگر معنای x, y را، از شکل ۴۱، به خاطر بیاوریم، برای ما روشن می شود که سیم، پشت سرهم، از مرحله هایی می گذرد که در شکل ۴۴ نشان داده شده است.



شکل ۴۴

معادله خط راست MON ، عبارت است از $y = -x$ و متناظر با حرکتی است که، در آن، جابه جایی در نقطه های B و C از لحاظ قدر مطلق برابر و از لحاظ جهت متفاوت اند، آن طور که در شکل ۴۵ می بینید.

برای کسانی که با نظریه صدا آشنایی دارند، روشن است که، این دو نوع نوسان، نخستین (پرده اصلی) و دومین هم سازی سیم پیانو را به خاطر می آورد. وقتی که سیم نوسان می کند، گوش آشنا به موسیقی، می تواند هر دو



شکل ۴۵

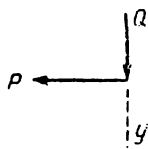
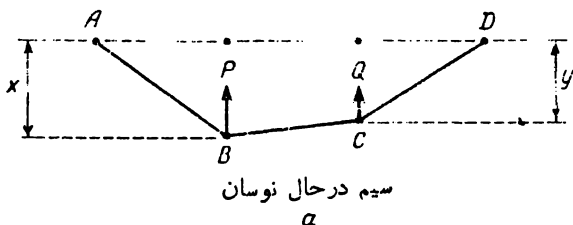
نوسان را حس کند: هم هارمونی اول و هم هارمونی دوم. در این جا هم، دوباره، بانمونه‌ای از جمع روبه‌رو هستیم. این جمع صداها را می‌توان از دودیاپازونی که به‌طور هم‌زمان به‌صدا درمی‌آیند، به دست آورد: یکی پرده اصلی را تولید می‌کند و دیگری هارمونی دوم را. و عاقلانه است که، در این جا از مجموع دو صدا صحبت کنیم.

در واقع، موسیقی، نقش عمده‌ای در پیشرفت نظریه نوسان‌ها داشته است. ریاضی‌دان، به سادگی می‌تواند دو جواب ساده را، که متناظر با هارمونی اول و دوم باشد، پیدا کند. ولی تنها وقتی می‌تواند این دو جواب را جمع کنند و جواب بغرنج‌تری به دست آورند که، موسیقی‌دان اعلام کند، که می‌تواند هر دوی آن را با هم بشنود!

وسیله‌ای که در شکل ۴۳ نشان داده‌ایم، تنها یکی از روش‌هایی است که، به کمک آن، می‌توان به این جمع تحقق بخشید. چهارضلعی $OSRT$ ، در روی شکل، همیشه متوازی‌الاضلاع است و، بنابراین، با توجه به فصل اول، می‌توان نوشت: $R = S + T$. با جابه‌جایی سیم‌ها، نقطه S (نقطه برخورد سیم اول با GOF)، در طول GOF ، به عقب و جلو و نقطه T در طول MON به عقب و جلو «می‌جهند»، ولی بسامد T بیشتر از S است. چون $R = S + T$ ، حرکت نقطه R را می‌توان به عنوان ترکیب این دو حرکت در نظر گرفت، یعنی با جمع بردارها، که در فصل اول درباره آن صحبت کرده‌ایم، سروکار داریم.

۱. به کتاب

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung
جلد ۱۵، II، ۱ (۱۹۰۱-۱۹۰۳)، صفحه ۵ مراجعه کنید. این ارتباط را برای نخستین بار د. برنولی (تقریباً در سال‌های ۱۷۳۵-۱۷۵۰) پیدا کرد ریاضی‌دانان آن زمان، دیدگاه‌های او را قبول نداشتند.



بسامد (فرکانس) سرپوش
 $0 \quad x$
 b
 شکل ۴۶

یادآوری می‌کنیم که، در این جا، به جز جمع بردارها، با عمل‌های ماتریسی هم سروکار داریم. به دستگاه سیمی که نوسان می‌کند، برمی‌گردیم. وقتی که سیم را می‌کشیم (آن‌طور که در شکل ۴۶- a نشان داده شده است)، با عمل نیروهایی مواجه می‌شویم که می‌خواهند نقطه‌های B و C را، به موضع اولیه خود، برگردانند. این نیروها، عبارتند از نیروی P که می‌خواهد فاصله x را کم کند، و نیروی Q که می‌خواهد از فاصله y بکاهد، از آن‌جا که رفتار ذره در روی سرپوش، طرح‌دینامیکی دقیقی از حالت سیم را به ما می‌دهد این امکان به وجود می‌آید که نیروهای P و Q را، با اصطلاح‌های مدل سرپوش خود، معین کنیم.

در این دستگاه، این نیروها، آن‌طور که در شکل ۴۶- b نشان داده شده است، عمل می‌کنند: نیروی P ذره را به غرب می‌کشد، و نیروی Q به طرف جنوب. نیروی منتجه، روی شکل ۴۲، با پیکان‌های «مایل» نشان داده شده است.

خود نیروهای P و Q ، به وسیله معادله‌های خطی

$$P = 2x - y$$

$$Q = -x + 2y$$

داده می‌شود که، به سادگی، به صورت ماتریس درمی‌آیند.

مطالعه شکل ۴۳ نشان می‌دهد که محورهای x و y ، فاصله به طرف مشرق و y ، فاصله به طرف شمال را اندازه می‌گیرد. ولی در بحث بالا، این جهتها، دارای نقش اساسی نبودند. برعکس، بارها درباره جهتهای در طول خطهای راست FOG و MON ، یعنی در جهت شمال شرقی و شمال غربی، صحبت کردیم. وقتی که مساله مربوط به سیم در حال نوسان را مطرح می‌کنیم، نمی‌توانیم، بدون x و y ، عمل کنیم. اینها، طبیعی‌ترین متغیرهایی هستند که نیروهای P و Q و انرژی پتانسیلی V را می‌توان به کمک آنها بیان کرد. وقتی هم که به حل مساله پرداختیم، بهتر دیدیم که محورها را در جهت شمال شرقی و شمال غربی انتخاب کنیم.

لزومی ندارد که، به تفصیل، تمامی راه حل را بیاوریم، زیرا برای این منظور، باید درباره نیروها، شتابها و معادله‌های دیفرانسیلی بحث کنیم که مارا از خط اصلی خود درومی‌کند! تمام توجه خود را روی ویژگی اصلی یعنی معادله‌های خطی معرف نیروهای P و Q بر حسب x و y ، متمرکز می‌کنیم. حدس ما این است که، اگر این معادله‌ها را به محورهای جدید FOG و NOM ببریم، ساده‌تر می‌شوند.

مطالعه تبدیل‌ها

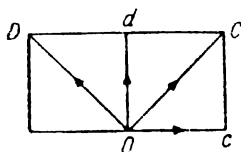
اکنون مناسب است که P و Q را، x^* و y^* بنامیم و درباره تبدیل (x^*, y^*) صحبت کنیم، که متناظر با معادله‌های زیر است:

$$\begin{cases} x^* = 2x - y \\ y^* = -x + 2y \end{cases} \quad (1)$$

۱. اگرچه، برای انجام این بحث‌ها، هیچ‌گونه نگرانی وجود ندارد. معادله‌های حرکت عبارتند از $x = -2x + y$ و $y = x - 2y$. برای این‌که محورهای جدید را وارد کنیم، قرار می‌دهیم: $x = u + v$ و $y = u - v$. بعد از قراردادن در دو معادله اول، معادله‌های جدید $u = -u$ و $v = -3v$ به دست می‌آید که جواب آنها عبارت است از

$$u = A \cos t + B \sin t, \quad v = C \cos(t/\sqrt{3}) + K \sin(t/\sqrt{3})$$

این معادله‌ها، به خودی خود، چیز زیادی دربارهٔ خصلت تبدیل، به ما نمی‌دهند. آیا با تغییر محورها، کار بهتر نمی‌شود؟ در شکل ۴۷ نشان داده شده است که جهت‌های تازه بر جهت بردارهای C و D منطبق‌اند، بنابراین، مثل قبل، محور ببردارهای c و d متناظر می‌شوند.



شکل ۴۷

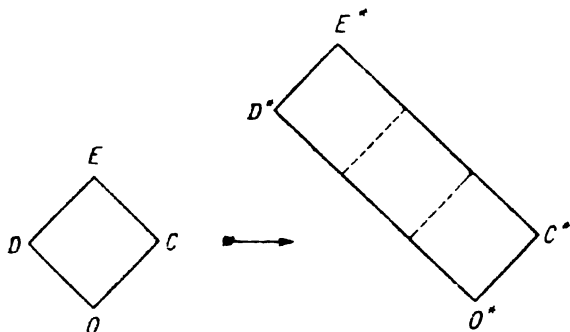
ولی، این تبدیل، با نقطه‌های C و D چه می‌کند؟ نقطهٔ C ، در محورها، قبلی، دارای مختصات $x = 1$ و $y = 1$ بود. اگر این مقادیر را در معادله‌های (۱) قرار دهیم، به دست می‌آید: $x^* = 1$ ، $y^* = 1$. یعنی نقطهٔ C ، در این تبدیل، بی‌تغییر می‌ماند. سرمایه‌گذاری C ، همان مبلغ را برمی‌گرداند: $C \rightarrow G$. و اما دربارهٔ نقطهٔ D ؛ اگر مختصات آن $x = -1$ ، $y = 1$ را در معادله‌های (۱) قرار دهیم، به دست می‌آید: $x^* = -3$ ، $y^* = 3$. و این به معنای آن است که، تبدیل $D = -c + d$ را به $D^* = -3c + 3d$ منجر می‌کند. یعنی D^* ، عبارت است از $3D$.

بنابراین، تبدیل را به صورت نمادی، می‌توان چنین نوشت: $C \rightarrow C$ ، $D \rightarrow 3D$. در طرح بانکی متناظر با این تبدیل، سرمایه‌گذاری $XC + YD$ به $XC + 3YD$ منجر می‌شود؛ که با برابری قرار دادن مقادیر متناظر، به دست می‌آید:

$$\begin{cases} X^* = X \\ Y^* = 3Y \end{cases} \quad (2)$$

این معادله‌ها، نسبت به معادله‌های قبلی، ساده‌ترند و، ضمناً، تعبیر هندسی روشنی دارند: $X^* = X$ به معنای آن است که مختص اول نقطه را تغییر نمی‌دهیم؛ و $Y^* = 3Y$ به این معناست که مختص دوم سه برابر می‌شود. این نگاهت را، از نظر هندسی، در شکل ۴۸ نشان داده‌ایم. این

نگاشت خیلی روشن و به سادگی قابل درك است. ولی چه خوب خود را پنهان کرده است؟ این نگاشت، معادله‌های $Q = -x + 2y$ و $P = 2x - y$



شکل ۴۸

را به ما تلقین کرد که نیروهای وارد بر سیم را با جابه‌جایی آن‌ها مربوط می‌کرد. ولی در خود مسأله مربوط به نوسان سیم، هیچ‌چیزی وجود نداشت تا ما را به این فکر بیندازد که، در این جا، با تبدیلی به این سادگی سروکار داریم. سادگی، خود را در زیرانتخاب نامناسب و بی‌تفاوت محورها، پنهان کرده بود.

صورت قطری

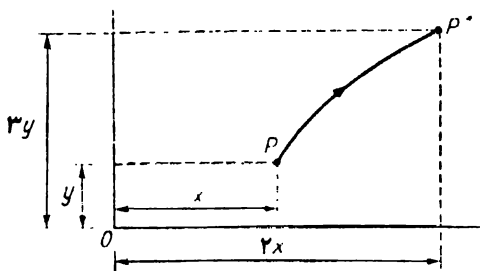
معادله (۱)، در بخش قبلی، با ماتریس $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ متناظر است. با تغییر محور، به معادله (۲) رسیدیم که، به نوبه خود، متناظر با ماتریس $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ است، که در آن، به جز در قطر اصلی، همه جا با صفر سروکار داریم.

وقتی که ماتریس به این صورت باشد، آن را صورت قطری گویند. ماتریسی که به صورت قطری داده شده باشد، دارای خصوصیتی است که مفهوم هندسی تبدیل متناظر آن را، به ما می‌دهد. به عنوان نمونه، ماتریس

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. این ماتریس متناظر است با معادله‌های $x^* = 2x$

و $y^* = 3y$ ، تبدیلی را تعریف می‌کند که، در آن، نقطه P منجر به نقطه P^* می‌شود (شکل ۴۹ را ببینید). نتیجه تبدیل عبارت است از: دوبرابر شدن

مقیاس روی محور OX و سه برابر شدن آن روی محور OY . این تبدیل را می‌توان این طور مجسم کرد که تصویری روی يك صفحه لاستیکی رسم کرده باشیم و، سپس، آن را از دو طرف، به اندازه لازم، کشیده باشیم.



شکل ۴۹

در این جا، چند تمرین آورده ایم که، در آن‌ها، باید محورها را طوری تغییر داد که ماتریس تبدیل به صورت قطری درآید. در همه آن‌ها می‌توان از روش بخش قبلی، استفاده کرد.

تمرین

۱. در بخش «مطالعه تبدیل‌ها»، محوره‌های جدید را براساس برابری‌های $C = c + d$ و $D = -c + d$ انتخاب کردیم. ببینید تبدیل‌های زیر، در دستگاه جدید محورها، به چه صورتی درمی‌آیند:

a) $x^* = y, y^* = x$;

b) $x^* = 3x - y, y^* = -x + 3y$;

c) $x^* = x + y, y^* = x + y$

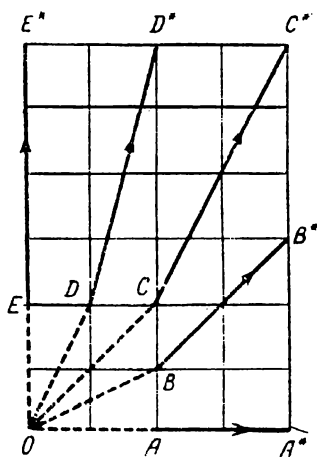
۲. کدام ماتریس از معادله‌های فصل سوم با تبدیل «a» و کدام با تبدیل

«c» متناظرند؟

مقدارهای خاص و بردارهای خاص

تبدیل $x^* = 2x$ و $y^* = 3y$ ، و مفهوم هندسی آن را، هم‌اکنون بررسی کردیم. همین تبدیل را، در شکل ۵۰، دوباره تکرار کرده ایم. نقطه‌های $A, B, C, \dots$ را انتخاب کرده و موضع جدید آن‌ها، $A^*, B^*, C^*, \dots$ را،

بعد از تبدیل، نشان داده ایم. روی شکل دیده می شود که، در نقطه های B و B^* ، C و D ، با «شکستگی» روبه روهستیم. مثلاً، نقطه های O ، B و B^* ، روی یک خط راست واقع نیستند. جهت OB^* ، نسبت به جهت OB ، شمالی تر است. یعنی، تبدیل مفروض، در حالت کلی، جهت هر بردار را تغییر می دهد. مثلاً، اگر بردار v را به دلخواه انتخاب کنیم و بدانیم که $v \rightarrow v^*$ ، آن وقت، بردارهای v و v^* ، معمولاً، امتدادهای مختلفی خواهند داشت. ولی در دو مورد، این حالت کلی، استثنا می شود: با منجر شدن A به A^* و E به E^* ، جهت بردارهای OA و OE ، ضمن تبدیل، ثابت می ماند. این بردارها را، که جهت آن ها ضمن تبدیل تغییر نمی کند، بردارهای خاص می نامند.



شکل ۵۰

این شرح هندسی را، که در مورد بردار خاص آوردیم، می توان به سادگی به زبان جبر ترجمه کرد. هر برداری که در جهت بردار v باشد، به صورت $k.v$ نشان داده می شود؛ بنابراین، برابری $v^* = k.v$ (برای مقداری از k)، به معنای آن است که بردار v^* در همان جهت بردار v است. این مطلب، در شکل ۵۰ دیده می شود، که در آن، $A^* = ۲A$ و $E^* = ۳E$. در تعریف بردار خاص، معمولاً به جای k ، از حرف یونانی λ استفاده می کنند و بردار v را بردار خاص گویند، وقتی که در برابری $v^* = \lambda v$ صدق

کند. عدد λ را، مقدار خاص بردار گویند. بنابراین، بردار A ، بردار خاصی است که مقدار خاص آن، برابر است با ۲. اگر بخواهیم کمترین زبان صوری استفاده کنیم، این مطلب، به معنای آن است که بردار OA (با حفظ جهت)، به اندازه دو برابر خود، کشیده شده است. بردار OE ، به اندازه سه برابر خود دراز شده است، بنابراین، OE بردار خاصی است با $\lambda = 3$.

با کمی دقت معلوم می شود که، جست و جوی محورهایی که ماتریس را به صورت قطری خود در آورد، چیزی جز جست و جوی بردارهای خاص نیست. این مطلب را روشن می کنیم.

فرض کنیم، محورهایی را پیدا کرده باشیم که تبدیل ماتریس را به صورت قطری آن، تأمین کرده باشند. این ماتریس را $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ می گیریم. این ماتریس متناظر است با معادله های $x^* = px$ و $y^* = qy$ ، و صورت کلی تبدیل، چنین است:

$$xc + yd \rightarrow pxc + qyd$$

اگر $x = 1$ و $y = 0$ بگیریم، به دست می آید: $c \rightarrow pc$ ؛ و اگر $x = 0$ و $y = 1$ بگیریم، به دست می آید: $d \rightarrow qd$. یعنی c بردار خاصی است با مقدار خاص p ، و d بردار خاصی است با مقدار خاص q .

به استدلال عکس می پردازیم. فرض کنید، دو بردار خاص c و d را، که جهت های مختلفی دارند، پیدا کرده باشیم. ثابت می کنیم که، اگر این جهت ها را به عنوان محورها در نظر بگیریم، ماتریس مفروض، به صورت قطری خود در می آید. مقدارهای خاص بردارها را، به ترتیب، p و q می گیریم. آن وقت: $c \rightarrow pc$ و $d \rightarrow qd$ و

$$xc + yd \rightarrow xpc + yqd$$

و معادله های تبدیل به صورت $x^* = px$ و $y^* = qy$ و ماتریس متناظر آن به صورت $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ در می آید، که ماتریسی به صورت قطری است. توجه کنید که، در این ماتریس، روی قطر اصلی، عددهای p و q قرار دارند که همان مقدارهای خاص هستند و نشان می دهند که، بردارهای خاص، به اندازه

چند برابر خود، دراز شده‌اند. این که، هربار، دربارهٔ تبدیل ماتریس به صورت قطری خود صحبت کنیم، امری خسته کننده و کسالت بار است. می توان، به طور ساده، دربارهٔ تبدیل «به صورت مفروض قطری» صحبت کرد. مثلاً تبدیل $c \rightarrow pc$ و $d \rightarrow qd$ از این گونه است، زیرا ماتریس متناظر آن، به طوری که دیدیم، دارای صورت قطری است.

صورت قطری تبدیل، اجازه می دهد تا مرتبهٔ این تبدیل را، به سهولت، محاسبه کنیم. مثلاً، تبدیل $c \rightarrow 2c$ و $d \rightarrow 3d$ را M می نامیم. کاربرد مرتبهٔ دوم این تبدیل، یعنی M^2 ، می دهد: $c \rightarrow 4c$ و $d \rightarrow 9d$ ؛ کاربرد مرتبهٔ سوم آن، M^3 می دهد: $c \rightarrow 8c$ و $d \rightarrow 27d$ ؛ و بالاخره کاربرد مرتبه n ام این تبدیل، یعنی M^n ، می دهد: $c \rightarrow 2^n c$ و $d \rightarrow 3^n d$. یعنی، هربار که M را به کار می بریم، c را دو برابر و d را سه برابر می کند.

در همین رابطه، هرچند جمله ای نسبت به M را هم، می توان به سادگی محاسبه کرد. مثلاً $M^2 + M$ ، متناظر است با تبدیل $c \rightarrow 6c$ و $d \rightarrow 12d$ زیرا «درآمد» $M^2 + M$ ، از جمع «درآمدهای» M^2 و M به دست می آید. در واقع، در زیر این محاسبه حسابی، يك قانون مندی پنهان شده است. اگر تبدیل $M^2 + M$ را به تفصیل بنویسیم، یعنی $c \rightarrow (2^2 + 2)c$ و $d \rightarrow (3^2 + 3)d$ ، آن وقت روشن می شود که همان قانون مندی به صورت $x^2 + x$ ، در این حالت مشخص وجود دارد. و اگر به جای عددهای مشخص ۲ و ۳، از نمادهای جبری استفاده کنیم، آن وقت، بلافاصله، به قانون مندی پی خواهیم برد. مثلاً فرض کنید، تبدیل $c \rightarrow pc$ و $d \rightarrow qd$ را T بنامیم؛ آن وقت T^2 به معنای $c \rightarrow p^2 c$ و $d \rightarrow q^2 d$ ، و T^3 به معنای $c \rightarrow p^3 c$ و $d \rightarrow q^3 d$ ، تبدیل $c \rightarrow (p^2 + 5p^2 + 7p)c$ و $d \rightarrow (q^2 + 5q^2 + 7q)d$ خواهد بود. عبارت $T^3 + 5T^2 + 7T$ ، تبدیل $c \rightarrow (p^3 + 5p^2 + 7p)c$ و $d \rightarrow (q^3 + 5q^2 + 7q)d$ را معین می کند، که در آن، قانون مندی عبارت درجه سوم $x^3 + 5x^2 + 7x$ ، به روشنی دیده می شود.

روشن است که، این نتیجه گیری، ارتباطی به انتخاب سه جمله ای درجه سوم ندارد. در این جا، قانون مندی خیلی کلی تری پنهان شده است. اگر $f(x)$ را يك چندجمله ای بگیریم، آن وقت، $f(T)$ به معنای تبدیلی به صورت $c \rightarrow f(p)c$ و $d \rightarrow f(q)d$ خواهد بود. با وجود این، در این جا

نکته‌ای وجود دارد که می‌توان آن را ، به قاشقی قطران در بشکه‌ای عسل تشبیه کرد. اگر چند جمله‌ای شامل مقدار ثابت باشد، مثل $f(x) = x + 1$ ، چه وضعی پیش می‌آید ؟ در این حالت ، $f(T)$ به چه معنا خواهد بود؟ تغییر مستقیم x به دو جمله‌ای $x + 1$ در T ، آن را به $T + 1$ تبدیل می‌کند ، یعنی تبدیل ، با عدد ۱ جمع می‌شود و می‌دانیم که این ، معنایی ندارد.

برای این که از این موقعیت نجات پیدا کنیم ، به این مطلب توجه می‌کنیم که چه انتظاری از حالت کلی داریم. ما می‌خواهیم ، $f(T)$ ، تبدیلی به صورت $c \rightarrow (f(p)c$ و $d \rightarrow f(q)d$ به ما بدهد. همین مطلب ، حتی در حالت $f(x) = x + 1$ ، ما را مستقیماً به هدف می‌رساند. بنابراین چه گفتیم ، تبدیل مجهول ، باید به صورت $c \rightarrow (p+1)c$ و $d \rightarrow (q+1)d$ باشد. از طرف دیگر ، چون $f(x) = x + 1$ ، می‌خواهیم آن را همچون «چیزی $T + 1$ » تفسیر کنیم. یعنی ، برای این که $f(T)$ را به دست آوریم ، باید به یک تغییر دست بزنیم: به جای x قرار دهیم T و به جای ۱ ، «چیزی» را که هنوز اطلاعی درباره آن نداریم. بحث را ادامه می‌دهیم. تبدیل T عبارت است از $c \rightarrow pc$ و $d \rightarrow qd$. همین pc و qd جزئی از تبدیل مجهول $c \rightarrow (p+1)c$ و $d \rightarrow (q+1)d$ هستند ، ولی تمامی آن را تشکیل نمی‌دهند. در آن ، جمله‌های c و d هم وجود دارد که متناظرند با تبدیل $c \rightarrow c$ و $d \rightarrow d$ ، و این ، چیزی جز تبدیل اتحادی I نیست. بنابراین ، I ، همان «چیزی» است که در جست‌وجوی آن بودیم. این کشف می‌تواند کاملاً مقبول باشد ، زیرا I بیش از هر چیزی ، به ۱ شباهت دارد و ، با یک توافق اضافی ناچیز ، توانستیم قضیه خود را حفظ کنیم . به این ترتیب ، ضمن عبور از $f(x)$ به $f(T)$ ، به این توافق رسیدیم که به جای ۱ ، تبدیل اتحادی I را قرار دهیم . مثلاً ، اگر داشته باشیم: $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ، آن وقت: $f(T) = T^2 + 2T + 3I$. قضیه را می‌توان به این صورت تنظیم کرد: اگر T ، تبدیلی از نوع $c \rightarrow pc$ و $d \rightarrow qd$ باشد ، آن وقت $f(T)$ تبدیلی است از نوع $c \rightarrow f(p)c$ و $d \rightarrow f(q)d$. توجه کنیم که c و d ، بردارهای خاص تبدیل $f(T)$ با مقدارهای خاص $f(p)$ و $f(q)$ هستند. در ماتریس $f(T)$ ، روی قطر

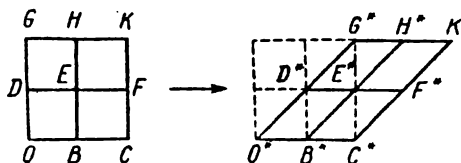
اصلی، جمله‌های $f(P)$ و $f(q)$ ، و در جاهای دیگر، صفر خواهیم داشت. استدلالی را که برای تبدیل دوبعدی به کار بردیم، می‌توان با موفقیت، برای تبدیل n بعدی هم به کار برد. مثلاً، در تبدیل سه‌بعدی، وقتی که T متناظر با $c \rightarrow pc$ ، $d \rightarrow qd$ و $e \rightarrow re$ باشد، $f(T)$ متناظر است با تبدیل $c \rightarrow f(p)c$ ، $d \rightarrow f(q)d$ و $e \rightarrow f(r)e$.

تبدیل‌ها و استثناها

دیدیم که، اگر تبدیلی به صورت قطری داده شده باشد، مفهوم هندسی آن به سادگی تشخیص داده می‌شود و محاسبه جبری آن، به ساده‌ترین صورت خود درمی‌آید. از این جا روشن است که، اگر با تبدیلی سروکار داشته باشیم، باید به دنبال محورهایی باشیم که امکان نوشتن آن را به صورت قطری فراهم کنند. پرسشی پیش می‌آید: آیا، این کار، همیشه ممکن است؟ به نظر می‌رسد که، معمولاً، ممکن است، ولی نه همیشه.

بحث درباره این پرسش، ارزش روش هندسی را آشکار می‌کند. این پرسش را می‌توان با اصطلاح‌های جبری، تنظیم و طرح کرد، ولی نتیجه محاسبه، در این مورد، نه ساده است و نه روشن. به همین مناسبت، بهتر است، بحث را به طریق هندسی انجام دهیم.

برای این که ماتریس را به صورت قطری درآوریم، همان‌طور که دیدیم، باید بردارهای خاص را - یعنی بردارهایی را که ضمن تبدیل فقط کشیده می‌شوند و جهت خود را تغییر نمی‌دهند - به عنوان محور انتخاب کنیم. بنابراین، اگر تبدیلی پیدا شود که نتواند منجر به صورت قطری شود، تنها به این دلیل است که نمی‌توان دو جهت را طوری پیدا کرد، که ضمن این تبدیل، بی‌تغییر بمانند.



شکل ۵۱

با نمونه چنین تبدیلی، قبلاً هم روبه‌رو شده بودیم (اگرچه، متوجه آن نبودیم). در نخستین تمرین فصل قبل، آن را با ماتریس A تعریف کردیم و، در این جا، آن را، روی شکل ۵۱ نشان داده‌ایم. معادله‌های آن عبارتند از $x^* = x + y$ و $y^* = y$. در این تبدیل، هر نقطه به طور افقی حرکت می‌کند: نقطه‌های D ، E و F به اندازه یک واحد و نقطه‌های G ، H و K به اندازه ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌شوند. جهت OG می‌چرخد و در جهت O^*G^* قرار می‌گیرد؛ همچنین، جهت OH به O^*H^* منجر می‌شود. همه نقطه‌هایی که بالای محور OBC قرار دارند، به طرف راست جابه‌جا می‌شوند. همه امتدادهایی که از مبدا O آغاز می‌شوند، در جهت شرق می‌چرخند. اگر شکل ۵۱ را به نحوی ادامه دهیم که نقطه‌های زیر محور را هم نشان دهد، می‌بینیم که این نقطه‌ها به سمت چپ می‌روند و امتدادهای متناظر آن‌ها - که از O آغاز می‌شوند - به سمت غرب می‌چرخند. نقطه‌های O ، B و C که بر محور واقع‌اند، تغییر مکان نمی‌دهند، یعنی تبدیل، جهت OB را تغییر نمی‌دهد.

جهت غربی - شرقی - تنها جهتی است که از تبدیل تأثیر نمی‌پذیرد. همه خط‌های راست دیگر طوری می‌چرخند که، از لحاظ ظاهر، بسته شدن قیچی را به یاد می‌آورد.

بنابراین، OB یک بردار خاص و، در نتیجه، برای یکی از محورها، مناسب است. ولی، بردار خاص دوم، وجود ندارد. به این ترتیب، بررسی نشان می‌دهد که، نمی‌توان دو محور پیدا کرد که، در آن‌ها، بتوان تبدیل را با ماتریسی به صورت قطری نشان داد.

چه موقع می‌توان تبدیل را به صورت قطری در آورد؟

اگر می‌شد هر تبدیلی را به صورت قطری در آورد، آن وقت، نظریه ماتریس‌ها، نظریه‌ای بی‌اندازه ساده بود. ولی، با کمال تأسف، این کار، همیشه میسر نیست. به همین مناسبت، طبیعی است که این پرسش پیش آید: چه موقع می‌توان یک تبدیل را به صورت قطری در آورد؟ در فصل بعد، روشن خواهیم کرد، معادله‌ای که در ماتریس صدق می‌کند، تفسیر ساده‌ای به ما می‌دهد.

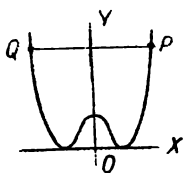
ولی در این جا، جدول معادله‌هایی را می‌آوریم که در ماتریس‌ها صدق می‌کنند؛ این معادله‌ها را از تمرین‌های فصل سوم برداشته‌ایم. در این جدول، مقدارهای خاص این ماتریس‌ها را هم داده‌ایم و، ضمناً، مشخص کرده‌ایم که کدام یک از آن‌ها می‌توانند به صورت قطری در آیند. با وجود کوچکی این جدول، آشنایی با آن، به ما یاد می‌دهد که، چگونه می‌توان به کمک معادله، متوجه شد که آیا ماتریس می‌تواند به صورت قطری تبدیل شود یا نه!

ماتریس X	معادله متناظر با آن	مقدار خاص λ	آیا برای ماتریس، صورت قطری وجود دارد
U	$X^2 - 1 = 0$	$+1, -1$	بله
W	$X^2 - 2X = 0$	$2, 0$	بله
I	$X - 1 = 0$	1	بله
A	$X^2 - 2X + 1 = 0$	1	نه
B	$X^2 - 2X + 1 = 0$	1	نه

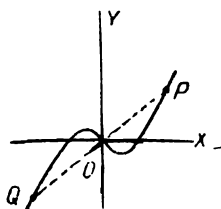
۵

فایدهٔ روش معادله‌ها

در برخورد اول، ممکن است به نظر آید که آغاز این فصل، به زمینه مورد بحث ما مربوط نیست، ولی در واقع، این طور نیست. روی شکل ۵۲- a ، نمودار تابع $y = x^4 - 2x^2 + 1$ رسم شده است. این نمودار، نسبت به محور OY متقارن است؛ هر نقطه $P(x, y)$ از نمودار، متناظر است با نقطه دیگر $Q(-x, y)$ ، که قرینه آن نسبت به محور OY است. روی شکل ۵۲- b ، نمودار تابع $y = x^3 - x$ داده شده است که، در آن، هر نقطه $P(x, y)$ ، متناظر با نقطه دیگر $Q(-x, -y)$ ، که قرینه P نسبت به مبدا O است.



a



b

شکل ۵۲

نمودار حالت شکل ۵۲- a را متقارن و نمودار حالت شکل ۵۲- b را ضد متقارن می نامیم. نمودار تابع $y = f(x)$ را متقارن گوئیم، وقتی که داشته باشیم: $f(-x) = f(x)$ و در حالت $f(-x) = -f(x)$ ، آن را

ضدمتقارن گوئیم^۱. این مفهوم‌ها، برای همه‌آشناست و، اغلب، برای رسم نمودار (به کمک دست) از آن‌ها استفاده می‌شود. ولی، همه نمودارها، دارای یکی از این دو ویژگی نیستند. مثلاً، نمودار تابع $y = g(x)$ ، که در آن $g(x) = x^2 + 5x^2 - 7x + 2$ ، نه‌مستقیم است و نه ضدمتقارن. ولی، قضیه‌ای وجود دارد که، در آن، ثابت می‌شود: هر تابع را می‌توان به صورت مجموع دو بخش نوشت، که یکی از آن‌ها، تابعی مستقیم و دیگری ضدمتقارن باشد. درستی این قضیه، برای تابع‌هایی از نوع $g(x)$ ، روشن است، زیرا بخش‌های مستقیم و ضدمتقارن تابع را، می‌توان با جدا کردن توان‌های زوج x از توان‌های فرد آن، تشخیص داد. ولی، این قضیه، برای نمودارهای $y = (x+5)(2x+3)$ یا $y = 10^x$ ، کمتر روشن است. احتمالاً، باید به تدریج و گام به گام جلو رفت: ابتدا قضیه را برای چند جمله‌ای‌ها، سپس برای کسرها، بعد برای رشته‌های نامتناهی و غیره، ثابت کرد. ولی، این روش نمی‌تواند درست باشد، زیرا مسئله تبدیل یک تابع به دو تابع مستقیم و ضدمتقارن، هیچ ارتباطی به سادگی یا بصری تابع ندارد. این قضیه، هم برای نمودارهایی که، به طور آزاد و بادیست، رسم شده‌اند و تن به هیچ گونه دستوری نمی‌دهند، و هم برای نمودار تابع‌هایی که عبارت تحلیلی مشخص مثل $y = x^2 + x$ دارند، به یک اندازه درست است. ضمناً، ضرورتی ندارد که تابع هموار و پیوسته باشد: می‌تواند دارای شکستگی‌های زاویه‌ای و یا پرش‌های تند باشد. در این جا، تنها یک محدودیت وجود دارد: باید با تابع سروکار داشته باشیم، یعنی، هر مقدار x متناظر با یک مقدار y باشد.

فرض کنید، نمودار تابعی مثل $y = G(x)$ در دست باشد و بخواهیم آن را به صورت $f(x) + \varphi(x)$ بنویسیم، به نحوی که $f(x)$ تابعی مستقیم و $\varphi(x)$ تابعی ضدمتقارن باشد. به جای x ، عددهای دلخواه a و $-a$ را قرار می‌دهیم. به ازای $x = a$ ، باید داشته باشیم:

۱. معمولاً، و منجمله در ادبیات ریاضی زبان فارسی، این دو نوع تابع را، به ترتیب، تابع زوج و تابع فرد می‌گویند، ولی ما، در این جا، از همان اصطلاح‌های نویسنده پیروی کرده‌ایم. م.

$$G(a) = f(a) + \varphi(a) \quad (۱)$$

و به ازای $x = -a$: $G(-a) = f(-a) + \varphi(-a)$. چون $f(a)$ متقارن و $\varphi(a)$ ضدمتقارن است، باید داشته باشیم: $f(-a) = f(a)$ و $\varphi(-a) = -\varphi(a)$. بنابراین

$$G(-a) = f(a) - \varphi(a) \quad (۲)$$

دستگاه دوم معادله (۱) و (۲) را، می توان به سادگی حل کرد. در این دستگاه $G(a)$ و $G(-a)$ معلوم و $f(a)$ و $\varphi(a)$ مجهول اند. به دست می آید:

$$\begin{cases} f(a) = \frac{1}{2}[G(a) + G(-a)] \\ \varphi(a) = \frac{1}{2}[G(a) - G(-a)] \end{cases} \quad (۳)$$

باید توجه کرد که، a می تواند هر عدد دلخواه باشد. به این ترتیب، اگر تابع های مجهول $f(x)$ و $\varphi(x)$ وجود داشته باشند، می توان آن ها را به کمک دستگاه (۳) معین کرد.

می توان تحقیق کرد که، این تابع ها، همه تقاضاهای لازم را بر می آورند. اگر در معادله اول دستگاه (۳)، x را به جای a قرار دهیم، به دست می آید:

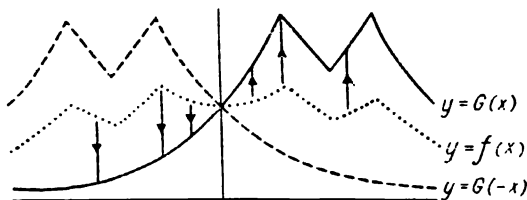
$$f(x) = \frac{1}{2}[G(x) + G(-x)]$$

به سادگی دیده می شود که این تابع متقارن است، زیرا با تبدیل x به $-x$ در سمت راست، تنها جای جمله های جمع عوض می شود. به همین ترتیب، معلوم می شود که تابع

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[G(x) - G(-x)]$$

ضدمتقارن است، زیرا با تبدیل x به $-x$ در سمت راست، علامت جمله ها عوض می شود. ولی مجموع دو تابع $f(x)$ ، $\varphi(x)$ ، برابر است با $G(x)$ ؛ یعنی توانسته ایم تابع $G(x)$ را به دو بخش متقارن و ضدمتقارن تقسیم کنیم. این جواب را، از نظر نموداری، روی شکل ۵۳ نشان داده ایم.

نمودار $y = G(-x)$ ، از راه قرینه نمودار $y = G(x)$ نسبت به محور OY به دست می آید.



شکل ۵۳

تابع $f(x)$ ، واسطه حسابی $G(x)$ و $G(-x)$ است، بنابراین نمودار آن، همان طور که در شکل می بینید، بین نمودارهای $G(x)$ و $G(-x)$ قرار می گیرد آن وقت، $\varphi(x)$ را باید به $f(x)$ اضافه کرد تا $G(x)$ را روی شکل به دست آورد. ما نمودار $y = \varphi(x)$ را نشان نداده ایم؛ به جای آن، با پیکان های قائم، نتیجه افزایش $\varphi(x)$ را مشخص کرده ایم. برای این که از نمودار $y = f(x)$ ، نمودار $y = G(x)$ را به دست آوریم، باید نقطه های سمت راست را در «منحنی نقطه چین» $y = f(x)$ بالا برد و نقطه های سمت چپ آن را پایین آورد. ضدمتقارن بودن $\varphi(x)$ ، با توجه به جهت پیکان ها، روشن می شود.

همان طور که قبلاً هم گفتیم، هیچ محدودیتی برای تابع $G(x)$ قایل نمی شویم. اساس استدلال، بر امکان عمل تبدیل x به $-x$ قرار دارد. بنابراین، بهتر است، برای این عمل، نمادی در نظر بگیریم؛ این نماد را، مثلاً M می گیریم. به این ترتیب، $MG(x)$ ، یعنی $G(-x)$. روی شکل ۵۳، می توان مفهوم نموداری عمل M را دید: عمل M ، قرینه نمودار را، نسبت به OY ، به دست می آورد.

وقتی که $G(x)$ ، به وسیله یک دستور داده شده باشد، عمل M را می توان به سادگی انجام داد. مثلاً

$$G(x) = x^3 + 5x^2 - 7x + 2 \Rightarrow MG(x) = -x^3 + 5x^2 + 7x + 2$$

اگر تابع، به صورت جدول داده شده باشد، باز هم می توان این عمل را انجام داد. مثلاً اگر داشته باشیم:

x	-2	-1	0	1	2
$G(x)$	4	11	7	2	9

آن وقت، بعد از به کار بردن عمل M ، خواهیم داشت:

x	-2	-1	0	1	2
$G(-x)$	9	2	7	11	4

یعنی، خیلی ساده، ردیف عددهای سطر دوم را عوض کردیم.

روشن است که اگر عمل M را، دوبار به کار ببریم، ما را به جای نخستین خود می‌رساند، یعنی: $M^2 = I$. اگر $f(x)$ ، عبارتی متقارن باشد، با عمل M ، تغییری نمی‌کند. بنابراین، برابری $Mf(x) = f(x)$ ، شرط متقارن بودن است.

هر عبارت ضدمتقارن، با انجام عمل M ، تغییر علامت می‌دهد. بنابراین، شرط ضدمتقارن بودن با برابری $M\varphi(x) = -\varphi(x)$ نوشته می‌شود. ما استدلال خود را، از تابعی مثل $G(x)$ آغاز کردیم و $f(x)$ و $\varphi(x)$ را از آن به دست آوردیم. تابع $f(x)$ متقارن و برابر است با $\frac{1}{4}[G(x) + G(-x)]$ که به کمک نماد M به صورت $\frac{1}{4}(I + M)G(x)$ درمی‌آید. آیا می‌توان قانع شد که، حتی در این نوع علامت‌گذاری، باز هم $f(x)$ متقارن است؟ متقارن بودن $f(x)$ ، به معنای آن است که، با عمل M ، تغییر نکند و این را می‌توان، مستقیماً، با استفاده از بعضی ویژگی‌های جبری M ، نشان داد.

اگر داشته باشیم: $f = \frac{1}{4}(I + M)G$ ، آن وقت

$$Mf = \frac{1}{4}M(I + M)G = \frac{1}{4}(M + M^2)G = \frac{1}{4}(M + I)G$$

گام آخر را، براساس $M^2 = I$ ، برداشتیم. به دست می‌آید $Mf = f$ ، یعنی تابع $f(x)$ متقارن است. به همین ترتیب، ضدمتقارن بودن $\varphi(x)$ را هم

می‌توان با محاسبه تأیید کرد؛ با فرض $\varphi = \frac{1}{4}(I - M)G$:

$$M\varphi = \frac{1}{4}M(I-M)G = \frac{1}{4}(M-M^2)G = \frac{1}{4}(M-I)G$$

با مقایسه نتیجه‌هایی که برای φ و $M\varphi$ به دست آوردیم، می‌بینیم که $M\varphi = -\varphi$ و همین‌هم، معیار ضدمتقارن بودن است. بالاخره باید تحقیق کنیم که $G = f + \varphi$ ، یعنی

$$G = \frac{1}{4}(I+M)G + \frac{1}{4}(I-M)G$$

اگر در سمت چپ، G را با IG عوض کنیم :

$$IG = \frac{1}{4}(I+M)G + \frac{1}{4}(I-M)G$$

آن وقت، واضح می‌شود. در واقع، اکنون می‌توان آن را همچون کاربرد اتحاد $I = \frac{1}{4}(I+M) + \frac{1}{4}(I-M)$ ، به عنوان يك عمل گر، در مورد بردار G دانست.

تنها نکته‌ای که باید در نظر داشت تا این اثبات‌ها - که پشت نمادهای M و G مخفی شده‌اند - روشنی خود را به دست آورند، این است که بدانیم $M^2 = I$ و این که، در اینجا، تنها از تبدیل‌های عادی جبری استفاده کرده‌ایم. این بحث، ما را به فکر قضیه کلی‌تری می‌اندازد که می‌توان آن را، به تقریب، این طور بیان کرد: اگر داشته باشیم $M^2 = I$ ، آن وقت هر G را می‌توان به صورت مجموع $f + \varphi$ نشان داد، که در آن، $Mf = f$ و $M\varphi = -\varphi$ ولی، بدون وجود پیش فرض‌هایی برای M و G ، و هم برای نوع موضوع‌های f و φ ، نمی‌توانیم این حکم را ثابت کنیم.

جست و جوی شرط‌های لازم

از آن جا که در تنظیم قضیه بالا، مجموع $f + \varphi$ را به کار برده‌ایم، دست کم، باید بپذیریم که f و φ را می‌توان، به مفهومی، با هم جمع کرد. با دنبال کردن روش اثبات، می‌توان فرض‌های لازم دیگر را هم پیدا کرد.

بنابرا اثبات، f با عبارت $\frac{1}{4}[I+M]G$ معین می‌شود. از عبارت

$(I+M)G$ چه می فهمیم؟ قبل از همه، این عبارت برابر است با $G+MG$. بنابراین، MG باید طوری باشد که بتوان آن را به G اضافه کرد. برای سادگی کار، MG را H می نامیم. به زبان دیگر، باید مفهوم $G+H$ را روشن کنیم و، سپس، به $f = \frac{1}{4}(G+H)$ برسیم، یعنی باید در سیستمی

قرار بگیریم که، در آن، ضرب در $\frac{1}{4}$ معنا داشته باشد. این عمل ها، از نوع

عمل هایی هستند که در مورد گروهی از جانوران، در فصل اول، به کار می بردیم. این عمل ها، عبارت بودند از جمع و ضرب در عدد. در آن جا، فضای برداری را، به عنوان دستگاهی از موضوع ها تعریف کردیم که، در آن، بتوان محاسبه ها را، طبق قاعده هایی که در مورد گروه جانواران به کار می رود، انجام داد.

به این ترتیب، برای این که مفهوم $f = \frac{1}{4}(G+H)$ و $\varphi = \frac{1}{4}(G-H)$ تضمین شود و امکان مراجعه به آن ها، شبیه فصل اول، وجود داشته باشد، کافی است بگوییم که G و H ، به یک فضای برداری تعلق دارند. در چنین صورتی، عمل های مورد نظر، و مثلاً $f + \varphi = G$ ، کاملاً مفهوم است.

بنابراین، G و H ، باید هر دو به یک فضای برداری تعلق داشته باشند. چون H همان MG است، بنابراین MG هم، به همان فضای برداری تعلق دارد، یعنی، M باید عملی باشد که نگاشت این فضا را بر خودش تبدیل کند. هیچ کدام از عمل های قبلی، برای M مناسب نیست. بحث های بخش قبل، شامل عبارت Mf بودند، که در آن، $f = \frac{1}{4}(G+H)$ ، و عملی به صورت

$$M: \frac{1}{4}(G+H) = \frac{1}{4}(MG+MH)$$

به نظر می رسد که، همه این ها را، می توان با هر تبدیل خطی انجام داد. تبدیل T را وقتی خطی گویند که رابطه های $T(u+v) = Tu + Tv$ و $T(ku) = kTu$ برقرار باشند (u و v ، بردارهایی دلخواه و k ، عددی دلخواه است). این ویژگی ها را، هر «طرح بانکی» به خودی خود دارد: «درآمد»

حاصل ازدو سرمایه گذاری با هم جمع می شوند و اگر سرمایه گذاری را k برابر کنیم، سود آن هم k برابر می شود. به همین علت بود که برای ورود به تبدیل های خطی، از طرح های بانکی استفاده کردیم. هر تبدیلی که به وسیله معادله های خطی (ویا ماتریس، که همان است) تعریف شود، يك تبدیل خطی است.

اکنون دیگر می توانیم قضیه کلی خود را، با شرح دقیق موقعیتی که در آن قابل طرح است، تنظیم کنیم:

اگر يك فضای برداری و يك تبدیل خطی M از این فضا به خودش که دربرابری $M^2 = I$ صدق می کند، مفروض باشد، برای هر بردار G ، می توان بردارهایی مثل f و φ پیدا کرد که در برابری $G = f + \varphi$ صدق کنند، که در آن، $Mf = f$ و $M\varphi = -\varphi$.

ولی، این بیان، که صدایی رسا دارد، ممکن است آنهایی را که با اصطلاح ها آشنا نیستند، مرعوب کند. ولی اگر قاعده آن ها را به خاطر آوریم همه چیز روشن می شود. مفهوم این واژه ها را به طور کامل روشن می کنیم. «فضای برداری مفروض» به معنای همه آن چیزهایی است که، در فصل اول، درباره گریه ها و سگ ها و متوازی الاضلاع ها گفته شده است. گفت و گویی را به خاطر بیاورید که درباره جمع بردارها داشتیم و استدلال های خالص ریاضی را به یاد آورید که کار برد قانون های صوری جمع سرعت ها را در باره جمع تابع های درجه دوم و یا هر گونه تابع های دلخواهی روشن می کرد. اگر این ها را به خاطر آورید، متوجه می شوید که این قضیه تا چه حد کلی است و می تواند در موقعیت های بسیار متنوعی، که شباهت های معینی با هم دارند، به کار رود. بعد، این بیان را داشتیم که « M »، عبارت است از تبدیل خطی این فضا به خودش». در فصل سوم، این گونه تبدیل خطی را بررسی کردیم و، بعد، با نمونه های زیادی از تبدیل خطی روبه رو شدیم. جدا کردن این مفهوم ها از یکدیگر، به ما کمک می کند تا موقعیت و امکان های این قضیه را بهتر دریابیم. این کار، شبیه یادداشت هایی است که از نمایش برمی داریم و، به کمک آن ها، می توانیم بهتر به ماهیت قضیه پی ببریم.

این قضیه ، نمونه مشخصی از قضیه‌های ریاضیات امروزی است که، در آن، هیچ چیزی وجود ندارد که حالت مشخصی را به یاد ما بیاورد. این قضیه به موقعیت‌های زیادی مربوط می‌شود که، در چشم‌انداز معینی، به صورتی کلی جلوه کرده‌اند. این حد انتزاع ، اغلب موجب ناراحتی دانشجویان می‌شود و آن‌ها را به دشواری می‌اندازد ، زیرا نمی‌توانند همه موقعیت‌هایی را که در میدان کاربرد قضیه قرار دارند، پیش‌خود مجسم کنند.

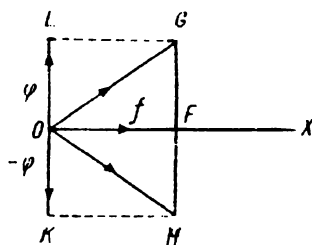
برای برطرف کردن این دشواری، مطالعه و بررسی مطلب ازدو سمت مختلف، اغلب می‌تواند مفید واقع شود: از يك طرف، به بررسی حالت‌های خاص پردازیم و، از طرف دیگر وهم‌زمان با آن، پیشرفت منطق استدلال را دنبال کنیم.

صفحه ، نمونه‌ای از يك فضای برداری ساده است. به عنوان M ، می‌توان قرینه صفحه را نسبت به محور افقی OX در نظر گرفت، زیرا در مورد آن داریم: $M^2 = I$. این مثال، در شکل ۵۴، روشن شده است. روی صفحه، نقطه دلخواه G انتخاب شده است. بردار G را می‌توانید به میل خود تصور کنید: یا خود نقطه و یا پیکان OG . بردار H عبارت است از قرینه بردار G نسبت به OX ، بنابراین: $H = MG$. ضمن اثبات قضیه، پیدا کردیم:

$$f = \frac{1}{\varphi}(G + H)$$

و این، بنا بر دستوری که در فصل اول به دست آوردیم،

وسط نقطه‌های G و H را معین می‌کند.



شکل ۵۴

نقطه f ، وسط دو نقطه G و H است. f را می‌توان خود نقطه F و یا ، احتمالاً ساده‌تر از آن ، پیکان OF گرفت. چون G برابر $f + \varphi$

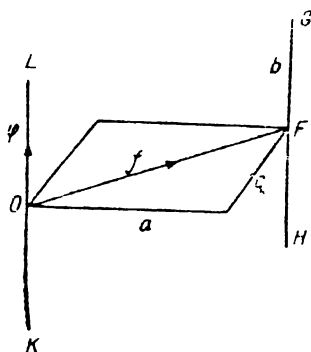
باشد، بنابراین، φ چیزی است که اگر آن را به f اضافه کنیم، G به دست آید. بردار φ را می توان با پیکان FG ، یا آن طور که در شکل دیده می شود، با پیکان OL نشان داد. در نتیجه، بابه کاربردن عمل M ، تمامی شکل، مثل تصویر آئینه ای، نسبت به محور OX منعکس می شود. ضمناً، بردار f بی تغییر می ماند و جهت بردار φ عوض می شود. یعنی، همان طور که انتظار داشتیم، به دست می آید؛ $Mf = f$ و $M\varphi = -\varphi$. این مثال ساده و روشنی از قضیه بود و به ما کمک می کند تا روندهای هندسی و جبری را، که ضمن اثبات قضیه دیده بودیم، به خوبی لمس کنیم. با مثال های دیگری هم، در بخش بعدی این فصل، آشنا خواهید شد.

باید توجه کرد که، در بحث مربوط به هر حالت خاص، باید از همان شیوه استدلال کلی، که همه حالت های خاص را در بر می گیرد، پیروی کرد. با این روش، آن احساس بی گانگی و شگفتی که در ابتدا وجود داشت، به تدریج از بین می رود.

باز هم چند مثال

مثال های هندسی بعدی را می توان از زمینه ای به دست آورد که به تابع های متقارن و ضد متقارن (که این فصل را با آن ها آغاز کردیم) و عمل M برای عبور از $f(x)$ به $f(-x)$ ، مربوط می شود. از آن جا که ما در يك فضای سه بعدی زندگی می کنیم و، ضمناً، می خواهیم از شکل کمک بگیریم، محدودیت هایی در انتخاب تابع ها پیش می آید.

برای آغاز، سه جمله ای درجه دوم $ax^2 + bx + c$ را انتخاب می کنیم. عمل M ، آن را به $ax^2 - bx + c$ تبدیل می کند. اگر ضریب های سه جمله ای دوم را با a^* ، b^* و c^* نشان دهیم، آن وقت، به دست می آید: $a^* = a$ ، $b^* = -b$ و $c^* = c$. نتیجه تبدیل، روی شکل ۵۵، نشان داده شده است، که در آن، a با جهت به سمت مشرق، c به سمت شمال و b به سمت بالا، متناظر است. می بینیم که، تبدیل M ، عبارت است از تقارن ساده نسبت به صفحه افقی. هر بردار OG را می توان به دو بردار تجزیه کرد: بردار $f = OF$ روی صفحه افقی و بردار $\varphi = OL$ ، که روی خط راست قائمی که از O گذشته



شکل ۵۵

است، قرارداد دارد. در نتیجه به کاربردن M ، بردار f بی تغییر می ماند و بردار φ تغییر جهت می دهد، به نحوی که از نگاشت L ، K به دست می آید.

صفحه افقی و خط راست قائم را، که از نقطه O می گذرند، زیر فضاهای پایا می نامند. هر نقطه L از خط راست قائم، به نقطه K از همین خط راست منتقل می شود. هر نقطه F از صفحه افقی هم، به نقطه ای از همین صفحه می رود (در واقع، به خود نقطه F). یعنی، صفحه افقی و خط راست قائم، عبارتند از بازتابه های خاص خود. به این مناسبت آن ها را پایا (یعنی بی تغییر) گوئیم که، عمل M ، آن ها را، در جای خود نگه می دارد.

این زیر فضاهای پایا، ویژگی سودمندی دارند. اگر از آنچه در این زیر فضاها اتفاق می افتد، اطلاع داشته باشیم، آن وقت می توانیم بدانیم که چه بر سر هر نقطه این فضا می آید، زیرا هر نقطه G را می توان به صورت مجموع $f + \varphi$ تصور کرد، که در آن، f بر صفحه افقی و φ بر خط راست قائم قرار دارد. وقتی که بدانیم، عمل M ، با f و φ چه می کند، می توانیم به نتیجه تأثیر آن بر G پی ببریم، زیرا $MG = Mf + M\varphi$. در شکل ۵۳ داریم: $G = F + L$. چون $F \rightarrow F$ و $L \rightarrow K$ ، بنابراین $F + L \rightarrow F + K$. ولی $F + K$ ، همان H ، یعنی با منعکس (یا بازتابه) G ، نسبت به صفحه افقی است.

به این نکته توجه کنیم که، زیر فضاهای پایا - خط راست و صفحه -

فضاهایی خطی هستند. این مطلب، نه فقط برای این مسئله خاص، بلکه برای هر تبدیل خطی درست است.

همچنین یادآوری می‌کنیم که، هر بردار واقع بر صفحه افقی، یک بردار خاص با $\lambda = +1$ ، و همچنین، هر بردار واقع بر خط راست، برداری خاص با $\lambda = -1$ است.

تمرین

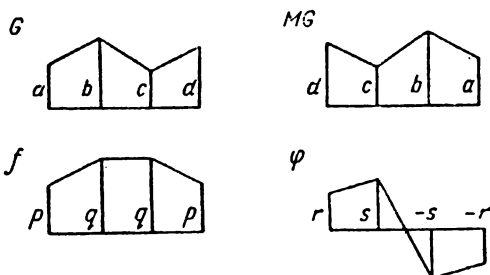
به جای سه جمله‌ای درجه دوم، عبارت به صورت $ax^3 + bx^2 + cx$ را در نظر بگیرید. عمل M ، در این حالت، چه مفهومی دارد؟ زیرفضاهای پایا کدام اند و مقدار متناظر λ ، برای این زیرفضاها چقدر است؟

اگر عبارت درجه سوم به صورت $ax^3 + bx^2 + cx + d$ را انتخاب کنیم، تبدیل مورد نظر M ، با برابری‌های $d^* = d$ و $c^* = -c$ ، $b^* = b$ ، $a^* = -a$ معین می‌شود. شرط این که، بردار، ضمن عمل M ، بی‌تغییر بماند این است که داشته باشیم: $a = 0$ ، $c = 0$ ، همهٔ عامل‌های به صورت $(0, b, 0, d)$ ، تشکیل زیرفضای پایا را می‌دهند که، در واقع، یک صفحه است، زیرا هر بردار واقع در آن به صورت $bu + dv$ درمی‌آید، که در آن، $u = (0, 1, 0, 0)$ و $v = (0, 0, 0, 1)$ و بردار خاصی است با $\lambda = +1$. به همین ترتیب، صفحه‌ای که شامل همهٔ نقطه‌های به صورت $(a, 0, c, 0)$ باشد، زیرفضای پناست که هر بردار متعلق به آن، بردار خاصی است با $\lambda = -1$. هر بردار دلخواه از فضای چهاربعدی را، می‌توان به صورت مجموع دو بردار $f + g$ تصور کرد که، در آن، f در یکی از صفحه‌های نامبرده و g در صفحهٔ دیگر آن، واقع شده است. ما نمی‌توانیم فضای چهاربعدی را، به روشنی، پیش خود تجسم کنیم، ولی این واضح است که، در این جا هم، با وضعی شبیه آن چه در مورد

۱. در واقع، فضای چندجمله‌ای‌هایی که از درجهٔ سوم تجاوز نکنند، یک فضای برداری چهاربعدی است. اگر «بردارهای محورها» (بردارهای پایه) را x, x^2, x^3 و ۱ بگیریم، آن وقت، چندجمله‌ای $ax^3 + bx^2 + cx + d$ به مختصات (c, b, c, d) خواهد بود. ۲.

فضای سه بعدی دیدیم، روبه روهستیم.

تبدیل مورد نظر M ، که بابر ابری های $a^* = -a, b^* = b, c^* = -c, d^* = d$ نوشته می شود، به صورت قطری است که اجازه می دهد، بدون مراجعه به قضیه مربوط به تجزیه $G = f + \varphi$ ، به خوبی آن را مورد بررسی قرار دهیم با وجود این، اگر نمودار خط های شکسته از نوع G را، که در شکل ۵۶ نشان



شکل ۵۶

داده شده است، مطالعه کنیم، این نظریه مفیدتر جلوه خواهد کرد. عمل M ، این نمودار را برمی گرداند، یعنی به صورت آینه ای منعکس می کند (با بخش اول این فصل مقایسه کنید). و با معادله های $a^* = d, b^* = c, c^* = b, d^* = a$ مشخص می شود. می دانیم که G را می توان به صورت مجموع دو تابع $f + \varphi$ نشان داد، که در آن، f نموداری متقارن با ورودی های p, q, q, p و φ نموداری ضد متقارن با ورودی های r, s, s, r است (آن طور که در شکل ۵۶ می بینید). بنابراین، $a = p + r, b = q + s, c = q - s, d = p - r$ با وارد کردن متغیرهای تازه p, q, r, s ، این تبدیل، به صورت قطری

$$p^* = p, q^* = q, r^* = -r, s^* = -s$$

منجر می شود.

نمودار G در شکل ۵۶، با چهار عدد a, b, c, d معین می شود. مجموعه همه این گونه نمودارهای G ، تشکیل یک فضای برداری چهار بعدی را می دهد. اگر نقطه های بیشتری را انتخاب کنیم، آن وقت با وصل آنها به کمک خط های راست، می توانیم فضایی برداری با تعداد بیشتری بعد به دست آوریم. اگر نقطه ها را به اندازه کافی تنگ هم بگیریم و آنها را به وسیله پاره خط های راست به هم وصل کنیم، خط شکسته ای با تعداد زیادی

حلقه‌های کوتاه به دست می‌آوریم که يك منحنی پیوسته را به یاد ما می‌آورد. این مطلب، ما را به این اندیشه می‌اندازد که نمودارهای تابع‌های پیوسته، می‌توانند يك فضای برداری با بی‌نهایت بعد را تشکیل دهند. به این ترتیب، دوباره به اندیشه‌ای برمی‌گردیم که در فصل دوم به ما تلقین شده بود: فضاهای برداری وجود دارد که عنصرهای آن‌ها را، تابع‌ها تشکیل می‌دهند. اگر به یاد بیاورید، این فصل را با بررسی تابع‌های متقارن و ضد متقارن آغاز کردیم. با تجزیه و تحلیل این موضوع، به قضیه‌ای می‌رسیم که با این واژه‌ها آغاز می‌شد: «اگر يك فضای برداری... مفروض باشد...». مفهوم فضای برداری، که از تابع‌ها تشکیل شده باشد، احتمالاً، از جمله فضاهای ساده نیست. ولی جالب این است که چگونه، خود مطالعه تابع‌ها، دائماً این اندیشه را به ما تلقین می‌کرد. در فصل هفتم، به تنظیم دقیق این اندیشه خواهیم پرداخت و تلاش خواهیم کرد تا همه قاعده‌های مربوط به آن را، به طور صعودی به دست آوریم.

تعمیم معادله

با بررسی تبدیل M ، دیدیم که، می‌تواند در معادله‌های مختلفی صدق کند. در تمامی این فصل، با معادله $M^2 = I$ سروکار داشتیم. با وجود این، دیدیم که معادله‌های بسیار دیگری هم وجود دارد که، تبدیل، در آن‌ها صدق می‌کند. آیا نمی‌توان، از حالت خاص مورد بررسی، يك نظام کلی را نتیجه گرفت؟ در بحثی که داشتیم، از این‌جا آغاز کردیم که، از بردار دلخواه

G ، بردار خاص f را تشکیل دادیم که عبارت بود از $\frac{1}{4}(M+I)G$.^۱ چرا

۱. بردار O هم. در معادله $Mf = \lambda f$ صدق می‌کند، ولی از این‌جا، نمی‌توان نتیجه گرفت که این، يك بردار خاص است. ممکن است پیش آید که

$\frac{1}{4}(M+I)G$ منجر به O بشود، در این صورت، در این حکم و حکم‌های

مشابه دیگری که درباره تشکیل بردارهای خاص خواهیم آورد، بایک استثنا روبه‌رو هستیم.

در این جا ، عبارت $\frac{1}{4}(M+I)$ ظاهر شد؟ زیرا M ، در معادله M^2-I

صدق می کند و، بنابراین، به سادگی روشن می شود که دلیل ظهور $M+I$ این است که یکی از عامل های M^2-I به شمار می رود. آیا این موضوع، ارتباطی با خاص بودن بردار f دارد؟ شرط خاص بودن بردار f (با $\lambda = +1$) را می توان با برقراری برابری $f = Mf$ نشان داد که می توان آن را، به صورت $f = O$ ($M-I$) نوشت. می بینیم که، در این صورت، شرط شامل عامل دیگر دوجمله ای M^2-I می شود. اکنون، اگر در شرط $f = O$ ($M-I$)، به جای f قرار دهیم: $\frac{1}{4}(M+I)G$ ، آن وقت، در حاصل ضرب حاصل، عامل M^2-I ظاهر می شود، که برابر است با O . همه این محاسبه ها را می توان این طور نشان داد:

$$(M-I)f = (M-I) \cdot \frac{1}{4}(M+I)G = \frac{1}{4}(M^2-I)G = O.G = O$$

اندیشه، روشن می شود. فرض می کنیم، با تبدیل T سر و کار داشته باشیم که در معادله $(T-I)(T-2I)(T-3I) = O$ صدق می کند و در جست و جوی بردار u باشیم که در معادله $(T-I)u = O$ صدق کند. روشن است که u را می توان برابر $(T-2I)(T-3I)G$ گرفت، که در آن، G يك بردار دلخواه است، زیرا داریم:

$$(T-I)u = (T-I) \cdot (T-2I) \cdot (T-3I) \cdot G = O.G = O$$

به همین ترتیب، اگر به بردار v نیاز داشته باشیم که در شرط $(T-2I)v = O$ صدق کند، می توانیم، آن را به صورت $v = (T-I) \cdot (T-3I)G$ بگیریم. یعنی همه عامل های معادله را، به جز عاملی که در شرط وجود دارد، در نظر می گیریم.

در بحث های خود درباره M^2-I ، برای f ، به جای $(M+I)G$ ،

$\frac{1}{4}(M+I)G$ را انتخاب کردیم. در این جا، عامل اضافی $\frac{1}{4}$ ، استدلال را خراب

نمی کند، زیرا عبارت $(M+I)$ را می توان در هر ثابت دلخواهی (البته،

به جز O ضرب کرد. در مورد تبدیل T ، که در بالا داشتیم، به طور طبیعی، می توان فرض کرد:

$$u = a(T - 2I)(T - 3I)G \text{ و } v = b(T - I)(T - 3I)G$$

(a و b ، عددهای دلخواهی هستند). برای کامل بودن دستگاه بردار w را هم در نظر می گیریم که در شرط $(T - 3I)w = O$ صدق کند. طبق نظام تشکیل بردارهای مجهول، داریم:

$$w = c(T - I)(T - 2I)G$$

ضمن محاسبه های با M ، این مطلب اساسی است که، G می تواند به صورت مجموع $f + g$ نشان داده شود. اکنون، شبیه آن، می خواهیم داشته باشیم: $G = u + v + w$ ، یعنی (برای هر G)

$$G = a(T - 2I)(T - 3I)G + b(T - I)(T - 3I)G + c(T - I)(T - 2I)G$$

این برابری را می توان طوری بررسی کرد که در سمت راست، نسبت به بردار دلخواه، عمل گر مرکبی به کار رود که آن را بی تغییر نگه دارد. این عمل گر اتحادی I است. اگر آن را برابر I قرار دهیم، می توانیم مسأله ای طرح کنیم و عددهای a ، b و c را (اگر ممکن باشد)، از برابری حاصل به دست آوریم:

$$I = a(T - 2I)(T - 3I) + b(T - I)(T - 3I) + c(T - I)(T - 2I)$$

چون این مسأله، به جبر مقدماتی مربوط می شود، حل آن را به صورت سنتی و آشنا می دهیم. آیا می توان a ، b و c را طوری پیدا کرد که، به ازای آن ها معادله

$$(4) \quad 1 = a(x - 2)(x - 3) + b(x - 1)(x - 3) + c(x - 1)(x - 2)$$

به اتحاد تبدیل شود؟ جواب را می توان، با انجام ضرب ها، در طرف راست به دست آورد، ولی ساده تر این است که، به ترتیب، به جای x ، عددهای ۱، ۲ و ۳ را قرار دهیم. برای مسأله، تنها يك جواب به دست می آید:

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = -1, \quad c = \frac{1}{4}$$

اکنون اگر به جای a ، b و c ، این عددها را قرار دهیم، آن وقت،

به کمک معادله قبلی، می توانیم هر بردار دلخواه G را به صورت $u+v+w$ نشان دهیم، که در آن

$$(T-I)u=O, (T-2I)v=O, (T-3I)w=O$$

که با برابری های $Tu=u$ ، $Tv=2v$ ، و $Tw=3w$ هم ارزند. این برابری ها، نشان می دهند که، تبدیل T ، بردارهای u ، v و w را به ترتیب، ۱، ۲ و ۳ برابر می کند و جهت آن ها را تغییر نمی دهد.

همان طور که نقطه های مختلف G ، در شکل ۵۵، به نقطه های مختلف F منجر می شدند، در این جا هم، بردارهای مختلف G ، به بردارهای مختلف u ، v و w می رسند. در حالت شکل ۵۵، با تغییر G ، موضع های ممکن F ، تمامی صفحه افق را پرمی کنند. در این جا هم می توان ثابت کرد که موضع های ممکن u ، یک زیر فضای خطی را پرمی کنند و، به همین ترتیب، موضع های ممکن v و w ، به ترتیب، زیر فضای خطی دوم و زیر فضای خطی سوم را می پوشانند. همه محاسبه ها، به همان صورتی که برای $M^2-I=O$ داشتیم، انجام می گیرند.

اگر در معادله (۴)، مقدارهای $a=\frac{1}{4}$ ، $b=-1$ و $c=\frac{1}{4}$ را

قرار دهیم و، سپس، دو طرف معادله را بر $(x-1)(x-2)(x-3)$ تقسیم کنیم، به این معادله می رسیم:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-3}$$

هر کسی که، مختصری، با آنالیز ریاضی آشنا باشد، این تبدیل را، به نام تبدیل کسر به کسرهای ساده تر، می شناسد و می داند که، مثلاً، در مورد انتگرال گیری از کسرهائی شبیه کسر سمت چپ برابری، کاربرد دارد.

در حالت عمل M ، از اتحاد $1 = \frac{1}{4}(1+x) + \frac{1}{4}(1-x)$ استفاده

کردیم. اگر دو طرف این اتحاد را بر x^2-1 تقسیم کنیم، تبدیل به کسرهای مقدماتی به دست می آید:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$

کسی که بروش تبدیل يك كسر به كسرهای مقدماتی مسلط باشد، ممکن است گمان کند که، از این ارتباط، می تواند استفاده کند و روش تبدیل هر بردار دلخواه G را به صورت مجموع بردارهای تشکیل دهنده آن به دست آورد. تبدیل (یا ماتریس) M را داریم که در معادله $F(M) = 0$ صدق می کند. كسر $\frac{1}{F(x)}$ را ، به صورت مجموع كسرهای مقدماتی ، تبدیل می کنیم. معادله حاصل را در $F(x)$ ضرب می کنیم، به معادله ای به صورت « عبارت معین = ۱ » می رسیم. اگر در این معادله ، x را به M تبدیل کنیم، برابری حاصل را می توان، به عنوان عمل گر، برای هر بردار دلخواه G به کار برد. ولی، هروقت که در $F(x)$ ، عامل های تکراری وجود داشته باشد، با این روش به بن بست می رسیم. در پایان فصل چهارم، درباره ماتریس A سخن گفتیم که نمی توانست به صورت قطری تبدیل شود. ساده ترین معادله ای که A در آن صدق می کند ، عبارت است از معادله $A^2 - 2A + I = 0$. چون $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ ، بنابراین، كسر $\frac{1}{(x-1)^2}$ را نمی توانیم به كسرهایی که ساده تر از خود آن باشد، تجزیه کنیم. به زبان دیگر، وقتی که معادله $F(x) = 0$ دارای ریشه های تکراری است، روش مابه هدف نمی رسد. آیا از این جا می توان نتیجه گرفت که، وجود ریشه های تکراری در معادله، به معنای آن است که ماتریس ، قابل تبدیل به صورت قطری نیست؟ هنوز نه ؛ ما تنها نشان دادیم که با روش مفروض، نمی توانیم این مسأله را حل کنیم. ولی ، آیا روش های دیگری وجود دارد که بتوان به آنها متوسل شد؟ ظاهراً نه، زیرا این قضیه وجود دارد که: اگر ماتریسی را بتوان به صورت قطری در آورد ، حتماً در معادله ای صدق می کند که دارای ریشه های تکراری نیست.

اثبات این قضیه، دشوار نیست. در پایان بخش «مقدارهای خاص،

بردارهای خاص» از فصل چهارم، یادآوری کردیم که، وقتی T به صورت قطری با عدددهای p ، q و r در قطر اصلی قابل تبدیل باشد، آن وقت، $F(T)$ هم قابل تبدیل به صورت قطری، با عدددهای $F(p)$ ، $F(q)$ و $F(r)$ در قطر اصلی خواهد بود. همین نتیجه گیری در مورد حالت با تعداد دلخواه بعدها هم درست است. مثلاً، فرض کنید می خواهیم در يك فضای شش بعدی محاسبه کنیم، یعنی T ماتریسی باشد با شش ستون و شش سطر. فرض کنید، این ماتریس، صورتی قطری با عدددهای $1, 1, 1, 2, 3, 3$ داشته باشد. بنابراین قضیه ای که دربند اخیر آوردیم، ماتریس $F(T)$ هم، دارای صورتی قطری با عدددهای $F(1), F(1), F(1), F(2), F(3), F(3)$ خواهد بود.

اگر بتوانیم تابع F را طوری انتخاب کنیم که هر شش عدد برابر صفر باشند، آن وقت، برابری $F(T) = 0$ را خواهیم داشت. زیرا $F(T)$ دارای صورت قطری است و، بنابراین، همه جمله هایی از آن، که روی قطر اصلی نباشند، برابر صفر می شوند. ولی، برای این که این شش عدد به صفر تبدیل شوند، کافی است داشته باشیم: $F(1) = 0$ ، $F(2) = 0$ ، $F(3) = 0$. و این، وقتی ممکن است که انتخاب کنیم:

$$F(x) = (x-1).(x-2).(x-3)$$

که در آن، هیچ کدام از عامل ها تکراری نیستند، یعنی معادله متناظر آن، ریشه های تکراری ندارد.

اثبات ریاضی این نتیجه گیری، به طور صوری، معرف نمونه ای از موردهایی است که: چگونه می توان آن چه را که درباره مثال خاصی انجام می دهیم، همیشه به کار ببریم.

از بحثی که انجام دادیم، می توان شرط لازم و کافی را به دست آورد. اگر تبدیل در معادله ای صدق کند که ریشه های تکراری نداشته باشد، آن وقت، می توان آن را به صورت قطری نوشت؛ و اگر در چنین معادله ای صدق نکند، به صورت قطری تبدیل نمی شود.

جست و جوی معادله

برای این که بتوانیم از قضیه فوق استفاده کنیم، باید ساده ترین شکل

معادله را جست و جو کنیم. در این ارتباط، دو پرسش پیش می آید. اول: آیا برای هرتبدیلی، می توان معادله سازگار با آن را پیدا کرد؟ دوم: اگر پاسخ پرسش اول مثبت است، چگونه می توان ساده ترین معادله را پیدا کرد؟ به این دلیل از «ساده ترین معادله» صحبت می کنیم که تبدیل، می تواند در معادله های بسیاری صدق کند؛ درست همان طور که، در جبر سنتی، عدد ۳، علاوه بر ساده ترین معادله $x - 3 = 0$ ، در معادله $(x - 3)(x - 5) = 0$ و یا، به طور کلی، در معادله به صورت $(x - 3)f(x) = 0$ هم صدق می کند؛ $f(x)$ ، یک چند جمله ای است.

در این مورد که، هرتبدیل خطی باید در معادله ای صدق کند، می توان به سادگی قانع شد. ابتدا، به فضای دوبعدی می پردازیم و، سپس، بحث را برای بعدهای بیشتر تعمیم می دهیم. قبل از همه یادآوری می کنیم (همان طور که در پایان فصل سوم هم دیدیم) که ماتریس 2×2 ، فضایی خطی را با چهار بعد تشکیل می دهد. سپس، به اندیشه ای توجه می کنیم که در بخش «نتیجه سودمند» از فصل دوم مطرح کردیم. T را ماتریس 2×2 دلخواهی می گیریم و ماتریس های I, T, T^2, T^3 و T^4 را بررسی می کنیم.

این چهار ماتریس هم در فضای چهار بعدی واقع اند، بنابراین، باید به صورت خطی به هم مربوط باشند، یعنی با معادله

$$aI + bT + cT^2 + dT^3 + eT^4 = 0$$

به هم مربوط شوند، که در آن، a, b, c, d و e ، با هم برابر صفر نیستند.

۱. ما هنوز در باره تعداد محدودی بعد می اندیشیم. حکم، وقتی درست خواهد بود که فضای بی نهایت بعدی هم مورد مطالعه قرار گیرد. مثلاً، عمل

دیفرانسیل گیری $D = \frac{d}{dx}$ ، خطی است. این عمل، با تعریف خطی بودن سازگار

است: $D(ku) = kDu$ ؛ $D(u+v) = Du + Dv$. با وجود این، تابع F ، که برای آن داشته باشیم $F(D) = 0$ ، وجود ندارد. تنها این می ماند که، اگر فضا را با تعداد محدودی بعد بگیریم، مثلاً با تابع های قابل دیفرانسیل گیری به صورت چند جمله ای که از درجه دوم تجاوز نکنند سروکار داشته باشیم، در جست و جوی معادله ای باشیم که D در آن صدق می کند.

به این ترتیب، معلوم می شود که T باید در معادله ای صدق کند که از درجه چهارم تجاوز نمی کند.

در واقع، کار، خیلی بهتر از آن چه به نظر می رسید، از آب درآمد، برای هر ماتریس 2×2 (T)، ماتریس های I ، T و T^2 هم به صورت خطی به هم مربوط اند و، بنابراین، T در یک معادله درجه دوم صدق می کند.

خود محاسبه را می توان به این ترتیب انجام داد. $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

می گیریم، در این صورت، با ضرب ماتریس T در خودش، به دست می آید:

$$T^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

با استفاده از ماتریس های P ، Q ، R ، S - که در تمرین ۱۸ فصل سوم از آن ها صحبت کردیم - می نویسیم:

$$\begin{aligned} I &= P + S \\ T &= aP + bQ + cR + dS \\ T^2 &= (a^2 + bc)P + (ab + bd)Q + (ac + cd)R + (bc + d^2)S \end{aligned}$$

آیا می توان m و n را طوری پیدا کرد که داشته باشیم:

$$T^2 + mT + nI = O$$

به نظر می رسد که می توان. برای این منظور، کافی است به روشی مراجعه کنیم که در بخش «رسیدگی به بستگی خطی» در فصل دوم، مورد استفاده قرار داده بودیم. دو معادله اول را، به ترتیب، در m و n ضرب و، سپس، هر سه معادله را با هم جمع می کنیم؛ آن وقت، باید ضریب های P و Q را در معادله حاصل، برابر صفر قرار دهیم. از این جا، دو معادله برای مجهول های m و n به دست می آید که، به ترتیب، برابرند با $-(a+d)$ و $ad - bc$ که، ضمناً، ضریب های R و S را هم برابر صفر می کنند. به این ترتیب، T در معادله زیر صدق می کند:

$$T^2 - (a+d)T + (ad - bc)I = O \quad (5)$$

معادله (۵) را، معادله مفسر ماتریس T می نامند. برای پیدا کردن این معادله مفسر، هیچ شرطی درباره a ، b ، c و d نداشتیم و، بنابراین، نتیجه حاصل برای هر ماتریس 2×2 درست است. با وجود این، لزومی ندارد که این

معادله، ساده‌ترین معادله نسبت به T باشد. اگر فرض کنیم:
 $a=2$ ، $b=0$ ، $c=0$ و $d=2$ ، آن وقت، معادله (۵) به صورت
 $T^2 - 4T + 4I = 0$ درمی‌آید که با معادله $(x-2)^2 = 0$ ، که ریشه
تکراری دارد، متناظر است، ولی نباید با عجله قضاوت کرد و، از این‌جا،
نتیجه گرفت که T نمی‌تواند به صورت قطری تبدیل شود، با وجودی که،
ماتریس آن، صورت قطری دارد. در این‌جا، موضوع این است که T در
معادله ساده‌تر $T - 2I = 0$ صدق می‌کند که متناظر است با معادله
 $x - 2 = 0$ ، که ریشه تکراری ندارد.

تبدیل‌ها و ماتریس‌ها

هرتبدیل، چنان بستگی نزدیکی با ماتریس معرف خود دارد، که
بسیاری از ریاضی‌دانان، برای هر دو آن‌ها، از يك نماد استفاده می‌کنند:
آن‌ها درباره تبدیل T و ماتریس T صحبت می‌کنند. ولی، این دو مفهوم با
هم فرق دارند و این چیزی است که نباید آن‌را از نظر دور داشت. دیدیم که
يك تبدیل را، با ماتریس‌های مختلفی می‌توان نشان داد و، این اختلاف،
به دستگاه محورهای انتخابی مربوط می‌شود. وقتی که درباره يك ماتریس
قضاوت می‌کنیم، هیچ مبنایی وجود ندارد که گمان کنیم این قضاوت، باتغییر
محورها، به قوت خود باقی می‌ماند. به زبان دیگر، داوری درباره يك ماتریس،
امری ذهنی است و به دیدگاه ما (یعنی به انتخاب محورها) بستگی دارد. در
حالی که، داوری درباره يك تبدیل، امری عینی است: این داوری، متناظر
با چیزی است که ما آن‌را حقیقت هندسی می‌نامیم. تبدیل T را در نظر بگیرید
که در برابری $T^2 = I$ صدق می‌کند. این برابری نشان می‌دهد که اگر
تبدیل T را دوبار به کار ببریم، همه چیز به وضع نخستین خود برمی‌گردد.
هر گونه تغییر محورها، این نتیجه را عوض نمی‌کند. محورها را هر جور
انتخاب کنیم، باز هم T ، ماتریسی می‌شود که مربعی برابر I دارد. همین بحث،
درباره معادله (۵) هم درست است. فرض کنیم، تبدیلی در معادله $T^2 = T + I$
صدق می‌کند. هر دو طرف معادله، تعبیر هندسی ساده‌ای دارند که ربطی
به انتخاب محورها پیدا نمی‌کنند. T^2 یعنی تکرار دوباره تبدیل T ؛ مفهوم

تبدیل $T+I$ را هم، بعد از بحث کوتاه زیر خواهیم دانست. فرض کنید،
برای هر نقطه P ؛ برابری $TP=Q$ برقرار باشد. در این صورت

$$(T+I)P=TP+IP=Q+P=R$$

که در آن، R عبارت است از رأس چهارم متوازی الاضلاع $OPQR$ (نقطه O ، همان طور که در پاورقی دوم بخش «برنامه ارلانگن» از فصل اول گفتیم، به معنای «هیچ» است و یک حقیقت هندسی است). در نتیجه، معلوم می شود که تبدیل T^2 (چون $T^2=T+I$)، باید نقطه P را به نقطه R بفرستد، که با رسم هندسی به دست می آید. چنین بحثی را می توان در مورد هر معادله ای، که تبدیل T در آن صدق می کند، انجام داد. به این مناسبت، معادله (۵)، دارای خصلت عینی است. تبدیل T را با هر گونه محورهای در نظر بگیریم، همیشه به یک معادله مفسر می رسیم. در باره ضریب های معادله مفسر، به خاطر اهمیت خاصی که دارند، بیشتر تأمل می کنیم. احتمالاً، در ضریب I ، دترمینان $ad-bc$ از ماتریس T را بشناسید. ضریب $-T$ ، یعنی $(a+d)$ را، مشخصه T گویند. بنابراین، مشخصه، برابر است با مجموع عنصرهایی از ماتریس T که روی قطر اصلی قرار دارند. این مشخصه، در نظریه زیبای مشخصه های گروه، نقش اساسی به عهده دارد.

برای این که معادله مفسر تبدیل T را به سرعت به دست آوریم، کافی است، دترمینان ماتریس $T-\lambda I$ را تشکیل و آن را برابر صفر قرار دهیم:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

اگر بعد از باز کردن دترمینان (۶)، λ و 1 را، به ترتیب، با T و I عوض کنیم، معادله (۵) را به دست خواهیم آورد. از این قاعده می توان، برای هر تعداد بعد، استفاده کرد. در بسیاری از کتاب های درسی، معادله مفسر، به صورت دترمینان داده شده است. در آن ها، معمولاً، ثابت می شود که T در معادله حاصل صدق می کند. این حقیقت، در ریاضیات، به قضیه کیلی-هامیلتون، معروف است. خود کیلی می گوید که، این قضیه چنان روشن بود که، بدون این که زحمت اثبات آن را به خود بدهد، نتیجه آن را

تنظیم کرده است. ما نمی‌دانیم که او، چرا این‌طور فکر می‌کرده است! ولی ریاضی‌دانان، احساس می‌کردند که آن‌را باید ثابت کرد و، ضمناً، خیلی هم بادقت.

۶

در مسیر کاربرد

خط اصلی فصل چهارم در این جهت بود که، اگر صورت قطری تبدیل را بدانیم، خیلی ساده، نتیجه خود تبدیل را می‌بینیم. در فصل پنجم به این مساله پرداختیم که کی و چگونه می‌توانیم تبدیل را به صورت قطری بدهیم. در فصل حاضر، با این زمینه آشنا خواهیم شد که، از مضمون این دو فصل، در کجاها می‌توان استفاده کرد.

در طبیعت، اغلب می‌توانیم روندی را آغاز کنیم که، تکامل بعدی آن، طبق قانون خاص خودش، وبدون دخالت ما، انجام می‌گیرد. مثلاً، در حالت انفجار، یا حالتی که به طور ساده، توپی را پرتاب می‌کنیم، با چنین وضعی روبه‌رو هستیم. شما می‌توانید، توپ را، در جهت معین و با سرعت لازم، پرتاب کنید، ولی هدایت حرکت آن، دیگر در اختیار شما نیست. قانون‌های حرکت توپ، به وسیله معادله‌های حرکت آن، بیان می‌شوند. ماتنها شرط‌های اولیه را می‌دهیم، آن وقت، راه حل، به صورت دستوری تنظیم شده است که نحوه حرکت توپ را برای ما روشن می‌کند.

نمونه ساده دیگری از این نوع، دنباله فیبوناچی است: دنباله‌ای از عددها که، در آن، هر عدد برابر است با مجموع دو عدد قبلی خود. اگر جمله‌های این دنباله را $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ بنامیم، شرط مفروض به صورت $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ نوشته می‌شود. ولی، این دستور، نمی‌تواند دو جمله اول را به ما بدهد. در این جا، انتخاب دو عدد نخست را می‌توان به شرط‌های اولیه پرتاب توپ تشبیه کرد. اگر به عنوان دو عدد نخست، همان‌طور که معمول است، مثلاً دو عدد ۰ و ۱ را بگیریم، آن وقت، تمامی دنباله،

به خودی خود، پیدامی شود: ۵، ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ... جواب عبارت است از دستور جمله عمومی a_n ، برای هراتتخاب دلخواه درمورد دوعدد نخست a_1 و a_2 .

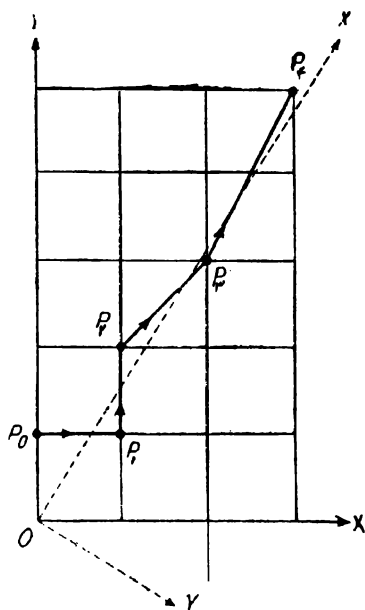
به سادگی می توان فهمید که، در قانون تشکیل دنباله فیبوناچی، يك تبدیل خطی پنهان شده است. مادنباله را، باعددهای ۱۳ و ۲۱ ختم کردیم. همین دوعدد کافی است تابتوانیم آن را ادامه دهیم. عدد بعدی باید برابر $۲۱+۱۳$ ، یعنی ۳۴ باشد، وحالا، «پایان» دنباله، ازعددهای ۲۱ و ۳۴ تشکیل شده است که، به نوبه خود، امکان ادامه دنباله رامی دهند. به سخن دیگر، «کدژنتیک» دنباله، به وسیله دوعدد آخرمنتقل می شود، زیرا به کمک آنها، می توان زوج بعدی را پیدا کرد: $(۲۱، ۳۴) \rightarrow (۱۳، ۲۱)$. نخستین زوج $(۵، ۱)$ را (x_0, y_0) و زوج دوم $(۱، ۱)$ را (x_1, y_1) می نامیم. می خواهیم، به کمک معادله، نشان دهیم که چگونه، زوج (x_n, y_n) ، زوج بعدی (x_{n+1}, y_{n+1}) را به وجود می آورند. در حالت $(۲۱، ۳۴) \rightarrow (۱۳، ۲۱)$ می بینیم که، عدد ۲۱، دومین عدد «ورودی»، همان اولین عدد «خروجی» است. در حالت کلی: $x_{n+1} = y_n$. دومین عدد «خروجی»، یعنی ۳۴، از $۲۱+۱۳$ تشکیل می شود؛ بنابراین $y_{n+1} = x_n + y_n$. به این ترتیب: $(x_n, y_n) \rightarrow (y_n, x_n + y_n)$. یعنی، عبور از يك زوج (x, y) به زوج بعدی (x^*, y^*) ، به وسیله تبدیل زیر، انجام می گیرد: $T: x^* = y; y^* = x + y$. باتکرار متوالی تبدیل، می توانیم جمله های تازه وتازه تری از دنباله را به دست آوریم:

$$(۵، ۱) \rightarrow (۱، ۱) \rightarrow (۱، ۲) \rightarrow (۲، ۳) \rightarrow (۳، ۵) \rightarrow \dots$$

با آغاز از (x_0, y_0) و n بار استفاده از تبدیل، به (x_n, y_n) می رسم، به نحوی که $(x_n, y_n) = T^n(x_0, y_0)$.

اگرزوج عددهای حاصل را، آن طور که در شکل ۵۷ می بینید، روی کاغذ شطرنجی ببریم، نقطه های متناظر، زنجیری راتشکیل خواهند داد که، درنظراول، نامنظم جلوه می کند و موجب تلقین هیچ اندیشه ای نمی شود. در فصل چهارم قانع شدیم که، خصالت تبدیل، وقتی روشن ترمی شود که T را به صورت قطری درآورده باشیم. برای تبدیل موردنظر ما، یعنی T ، به زبان

فصل پنجم داریم: $a=0$, $b=c=d=1$. بنابراین، معادله مفسر آن عبارت است از $T^2 - T - I = 0$. معادله متناظر آن، در جبر مقدماتی، دارای دوریشه است: $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ و یا به تقریب: $1/62$ و $-0/62$. این ریشه‌ها، از دیدگاه حساب، جالب و راحت نیستند، ولی در این جا، به موضوع دیگری کار داریم: ریشه‌ها، تکراری نیستند. به معنای آن است که دوبردار



شکل ۵۷

خاص وجود دارد که جهت آن‌ها را می‌توان محاسبه کرد و به صورت خط چین نشان داد (شکل ۵۷ را ببینید). تبدیل مفروض، باید نسبت به محورهای جدید - که بر خط‌های راست خط چین منطبق‌اند - به صورت قطری درآید، یعنی $X^* = 1/62X$ و $Y^* = -0/62Y$. به این ترتیب، تبدیل T ، هر بار مختص X را در $1/62$ و مختص Y را در $-0/62$ ضرب می‌کند: ببینیم، این مطلب، در شکل ۵۷ به چه صورتی درمی‌آید. مختص X به تدریج بزرگ می‌شود. مختص Y ، در هر گام، فشرده‌تر می‌شود، زیرا هر بار در عددی ضرب

می‌شود که، از لحاظ قدر مطلق، کوچکتر از واحد است. در واقع، اگر تعداد بیشتری نقطه را نشان دهیم، می‌توان دید که مقدار Y ، از لحاظ قدر مطلق، چنان کوچک می‌شود که به نظر می‌آید نقطه، بر محور X واقع شده است. علامت منفی، هر بار علامت Y را تغییر می‌دهد. این مطلب را روی شکل هم می‌توان دید. نقطه، هر بار از یک طرف محور X ، به طرف دیگر آن می‌رود.

محاسبه مفصل تر نشان می‌دهد که محور خط چین OX ، در دستگاه اولیه مختصات، معادله‌ای به صورت $y = 1/62x$ دارد. نقطه (x_n, y_n) ، در هر گام، به این خط راست نزدیکتر می‌شود. و این، به معنای آن است که، با بزرگ شدن n ، نسبت $\frac{y_n}{x_n}$ به $1/62$ ، و یا دقیق‌تر، به $\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ نزدیک

می‌شود. یعنی، در واقع، نسبت هر دو جمله مجاور در دنباله فیبوناچی

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \dots$$

به $\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ نزدیک می‌شود. این حقیقت را، همه کسانی که جبر کلاسیک را مطالعه کرده‌اند، می‌دانند، ولی برای آن‌ها که، نخستین بار، با دنباله فیبوناچی روبه‌رو می‌شوند، روشن نیست. جالب این است که نظریه تبدیل‌های خطی، ما را مستقیماً به این نتیجه رسانید.

مسئله فیبوناچی

مسئله کلی دنباله فیبوناچی را می‌توان این‌طور طرح کرد. فرض کنیم که برای a_0, a_1 ، دو عدد دلخواه انتخاب کرده باشیم. در این صورت، دستور کلی a_n چه خواهد بود؟ اگر صورت قطری تبدیل T را در اختیار داشته باشیم، به سادگی می‌توانیم به این پرسش، پاسخ بدهیم. در این جا، بدون این که به جزئیات بپردازیم، طرح کلی بحث را می‌آوریم. نسبت به محورهای جدید (شکل ۵۷)، زنجیره‌ای از نقطه‌ها را خواهیم داشت که، نه در $x = 1$ و $y = 1$ ، بلکه در $x = a_0$ و $y = a_1$ آغاز می‌شوند. به‌تر است که مختصات

نقطه آغاز، یعنی P_0 را، نسبت به محوره‌های خطچین پیدا کنیم: فرض کنید که، این مختصات، (X_0, Y_0) باشد. چون، با هر کاربرد T ، مختصات X و Y به ترتیب، در $۱/۶۲$ و $-۰/۶۲$ ضرب می‌شوند، بنابراین، بعد از n بار کاربرد T ، به نقطه (X_n, Y_n) می‌رسیم، که در آن، داریم:

$$X_n = (1/62)^n \cdot X_0, \quad Y_n = (-0/62)^n \cdot Y_0.$$

به این ترتیب، جای نقطه P_n ، روی شکل ۵۷، در دستگاه «خطچین» معین می‌شود. این مطلب، به ما امکان می‌دهد که، با مقیاسی که در دست داریم، مختصات (x_n, y_n) را در دستگاه اولیه پیدا کنیم. ولی (x_n, y_n) زوج (a_n, a_{n+1}) را در دنباله فیبوناچی معرفی می‌کند، یعنی $x_n = a_n, y_n = a_{n+1}$. بنابراین، کافی است x_n را پیدا کنیم تا جمله عمومی a_n را هم به دست آورده باشیم. اگر زحمت محاسبه y_n را هم تحمل کنیم، در واقع، تنها توانسته ایم درستی رابطه را تایید کنیم، بدون این که هیچ آگاهی تازه‌ای به دست آورده باشیم. تغییر محورها، به نتیجه‌ای به صورت

$$x_n = A(1/62)^n + B(-0/62)^n$$

می‌رسد، که در آن A و B ، نه به n ، بلکه به a_0 و a_1 بستگی دارند.

به این ترتیب، دستور دنباله فیبوناچی، باید به این صورت باشد:

$$a_n = A(1/62)^n + B(-0/62)^n$$

ممکن است این مطلب عجیب باشد که دستور مربوط به دنباله ۰، ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ... — که تنها از عددهای درست تشکیل شده است — تا این اندازه، به عدد گنگ $\sqrt{5}$ بستگی داشته باشد.

معادله‌های تفاوتی

دنباله فیبوناچی را به دلیل جالب بودن آن، انتخاب کردیم. قاعده فیبوناچی $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ، نمونه یک معادله تفاوتی است. معادله‌های تفاوتی، که به خودی خود دارای اهمیت‌اند، ارتباط نزدیکی با معادله‌های دیفرانسیلی دارند که نقش عمده‌ای در کاربردهای ریاضیات، به عهده آن‌هاست. نتیجه‌ای که برای دنباله فیبوناچی به دست آوردیم، می‌تواند برای گروه ۱. این گونه معادله‌ها را «معادله‌های با تفاضل‌های محدود» یا «معادله‌های برگشتی» هم می‌گویند. ۲.

گسترده‌ای از مثال‌ها، نمونه باشد.

در بسیاری از کتاب‌های درسی، می‌توان قاعده‌هایی برای حل معادله‌های تفاوتی پیدا کرد؛ ولی شاگردان علاقه‌ای به این قاعده‌ها نشان نمی‌دهند، زیرا خیلی اختیاری و آزاد به نظر می‌آیند.

فرض کنید، بخواهیم معادلهٔ تفاوتی $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ را حل کنیم. قاعدهٔ اول می‌گوید: «سعی کنید، جواب را به صورت تصاعد هندسی پیدا کنید، یعنی به صورت $a_n = r^n$ ». اگر این جواب را در معادلهٔ تفاوتی بگذاریم، به معادلهٔ $r^2 = 5r - 6$ می‌رسیم که جواب‌های آن عبارتند از $r_1 = 3$ و $r_2 = 2$. به این ترتیب، دو جواب جداگانه پیدامی‌کنیم: $a_n = 3^n$ و $a_n = 2^n$. قاعدهٔ دوم پیشنهاد می‌کند که این دو جواب خاص را با هم ترکیب کنیم و جواب کلی را به صورت $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$ بنویسیم. حسن کتاب‌های درسی در این است که درستی قاعدهٔ ۲ را ثابت می‌کنند و، همین، موجب حیرت دانش‌آموزان می‌شود: به چه مناسبت باید جواب را به صورت r^n جست و جو کرد؟

باید توجه داشت که، هر دو قاعده، جنبهٔ عملی دارند و به عنوان راهی ساده و سریع برای رسیدن به جواب مطرح می‌شوند. بحثی هم که ما در این جا انجام می‌دهیم، نه به قصد جست و جوی بهترین یا کلی‌ترین راه حل، بلکه به این قصد است که درستی این راه حل را نشان دهیم و، ضمناً روشن کنیم که چگونه می‌توان به این راه حل دست یافت. هیچ چیز، بیش از این، استعداد ریاضی را خراب نمی‌کند که از روش‌های حاضر و آمادهٔ راه حل استفاده کنیم، بدون این که از خودمان بپرسیم که چرا این روش‌ها را به کار می‌بریم و چگونه می‌توانیم مستقلاً آن‌ها را پیدا کنیم!

اگر معادلهٔ $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ را، با همان شیوهٔ دنبالهٔ فیبوناچی مطالعه کنیم، می‌توانیم ارتباط این معادله را با تبدیل T به صورت $y^* = -6x + 5y$ ، $x^* = y$ کشف کنیم. T دو مقدار خاص ۲ و ۳ را دارد که متناظرند با بردارهای خاص (۱، ۲) و (۱، ۳). اگر محورهای جدید را در امتداد این بردارها بگیریم، به تبدیلی به صورت $Y^* = 3Y$ ، $X^* = 2X$ می‌رسیم. اگر این تبدیل را n بار به کار ببریم، مختصات X و Y ، به ترتیب،

در 2^n و 3^n ضرب می‌شوند و، در نتیجه، به دستور $a_n = x_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$ در دستگاه اولیه مختصات، می‌رسیم.

وقتی که دانش‌آموزان، یکی دو نمونه از این گونه محاسبه‌ها انجام دهند و ببینند که این دستور از کجا به دست آمده است، آن وقت، می‌توانند قاعده‌های ۱ و ۲ را، برای حل معادله تفاوتی، به کار ببرند.

از آن چه گفتیم، می‌توان در انتظار جوابی به صورت $a_n = Ap^n + Bq^n$ بود، که در آن، p و q ، مقدارهای خاص‌اند. و معمولاً، به همین صورت پیش می‌آید. ولی، همین روش، به ما تلقین می‌کند که استثنایم وجود دارد، زیرا همه تبدیل‌ها را نمی‌توان به صورت قطری درآورد.

دنباله عددهای ۵، ۴، ۳، ۴، ۱، ۵، ... را در نظر می‌گیریم، که در معادله $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ صدق می‌کنند. به سختی می‌توان باور کرد که جمله‌های این دنباله بتوانند با دستور $a_n = Ap^n + Bq^n$ به دست آیند. در این جا، تبدیل T ، به صورت $y^* = -x + 2y$ ، $x^* = y$ است و در معادله $(T-I)^2 = O$ صدق می‌کند. معادله، ریشه تکراری دارد و، بنابراین، T نمی‌تواند به صورت قطری درآید. گمان نمی‌کنم لزومی داشته باشد که، درباره این حالت خاص، بیش از این بحث کنیم.

از معادله‌های تفاوتی به سمت معادله‌های دیفرانسیلی

این فصل را، با مثالی از حوزه فیزیک ریاضی - یعنی حرکت توپ - آغاز کردیم: حرکت توپ هموار است، و یا هموار به نظر می‌آید: هیچ گونه تکان یا پرشی در آن نمی‌بینیم. ولی اگر این حرکت را با دوربین فیلم برداری تثبیت کنیم، حرکت آن، همراه با پرش به نظر می‌آید. در یک عکس، توپ در محلی نشان داده می‌شود و در عکس بعدی در محلی دیگر، بدون این که معلوم باشد، فاصله بین این دو محل را، چگونه طی کرده است. اگر عکس‌ها را با عددهای ۵، ۱، ۲، ۳، ... شماره گذاری کنیم، دنباله‌ای از نقطه‌های $P_0, P_1, P_2, \dots$ به دست می‌آید، که در آن، P_0 محل توپ را در عکس ۵، P_1 محل آن را در عکس ۱ و غیره نشان می‌دهد.

برای مطالعه یک جریان پیوسته، معمولاً، از همین شیوه استفاده می‌کنند،

یعنی تغییر روند پیوسته را، به صورت دنباله‌ای از حالت‌های بینابینی در نظر می‌گیرند. مثلاً، با این که می‌دانیم، هر عدد حقیقی و مثبت x دارای لگاریتم است: $\log_{10} x$ ، نمی‌توانیم جدولی تشکیل دهیم که، در آن، لگاریتم‌های همهٔ عددهای بین ۱۰۰۱ مشخص شده باشد. هر جدول لگاریتم، تنها دنبالهٔ محدودی از عددها را دربرمی‌گیرد. ممکن است جدول لگاریتم کوچک باشد و لگاریتم عددهای ۱، ۱/۰۱، ۱/۰۲، ... را بدهد و یا جدولی بزرگ و شامل لگاریتم عددهای ۱، ۱/۰۰۰۰۰۰۰۱، ۱/۰۰۰۰۰۰۰۲ و غیره بشود. ولی، در هر حال، تنها یک دنباله را به دست می‌دهد.

تمامی فیزیک کلاسیک، متکی بر اندیشهٔ پیوستگی است و سلاح اصلی او عبارت است از محاسبهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها. معادلهٔ حرکت، تقریباً همیشه، به کمک یک معادلهٔ دیفرانسیلی داده می‌شود. در این معادله، نسبت به کمیت‌هایی مثل سرعت، شتاب، شیب و انحنا، بحث می‌شود. همهٔ بحث‌ها، بر اندیشهٔ حد متکی‌اند و این که، اگر یکی از کمیت‌ها به سمت صفر میل کند، چه وضعی پیش می‌آید. ولی فرض می‌کنیم که ما، قصد عبور به حد را نداشته باشیم. فرض کنیم، در فیلم برداری خود، در هر ثانیه، ۱۰۰۰ عکس برداشته باشیم. بی‌تردید، به کمک چنین فیلمی، می‌توانیم تصور خوبی دربارهٔ حرکت شیء به دست آوریم. ولی، تمامی پرسش در این است که: آیا به این طریق می‌توانیم، ارزیابی کاملاً دقیقی از سرعت و شتاب این حرکت به دست آوریم؟ به این ترتیب، اگر این اندیشه را دنبال کنیم، به جای یک تابع پیوسته، یک دنباله، و به جای معادله‌های دیفرانسیلی، معادله‌های تفاوتی به دست می‌آوریم (زمینه‌ای که، بحث این فصل، به آن مربوط می‌شود).

ریاضیات خالص، به نحوی جدی، به این اندیشه بستگی دارد. مثلاً، فرض کنیم که در همهٔ عکس‌ها، شیء مفروض را در یک محل نشان دهند. طبعاً به این فکر می‌رسیم که، این شیء، در جای خود ساکن است. ولی مگر نمی‌توان فرض کرد که، این شیء، بعد از هر عکس حرکت کرده است و، در لحظهٔ عکس بعدی، دوباره به جای نخستین خود، برگشته است؟ این فرض، از نظر منطقی، کاملاً قابل قبول است. آگاهی‌های ما، ثابت نمی‌کنند که جسم ساکن است و تنها، این فکر را، به ما تلقین می‌کنند. نقش ریاضیات در همین است

که، با دقت کامل، استنباطها را جدا کند و امکان‌های نادر را به‌ما نشان دهد.

بدل آنالیز ریاضی

به تکامل اندیشه‌ای که پیدا کردیم ادامه می‌دهیم و تلاش می‌کنیم، دستورهایی برای سرعت و شتاب و دیگر پدیده‌های دنیای جابه‌جایی تکان‌ها، پیدا کنیم. این تلاش، دو هدف را دنبال می‌کند، هدف اول این است که، با روش‌های مقدماتی، مفهوم معادله‌های دیفرانسیلی عادی و معادله‌های با مشتقات جزئی را، برای کسی که با آنالیز ریاضی سروکار نداشته است، روشن کنیم. هدف دوم ما نشان دادن روشی است که، در ماهیت امر، در دستگاه‌های محاسبه‌ای برای حل مساله‌های آنالیز ریاضی به کار می‌رود، چرا که کامپیوترها، در واقع، خیلی کلی‌تر از جدول‌های لگاریتم، عمل می‌کنند. از آن‌جا که امکانی برای تثبیت اندازه‌گیری‌های پیوسته نداریم، به کمک کامپیوتر، تکان‌های آن را معین می‌کنیم و، در نتیجه، سر آخر بایک دنبال سرکار داریم.

این بحث می‌تواند روشنی بیشتری بر آنالیز ریاضی بیندازد ولی، ضمناً باید به روشنی فهمید که، این بحث، در موقعیتی نیست که موجب تغییری در آنالیز ریاضی بشود. این خود یک تضاد و بجاست که، وقتی می‌خواهیم نتیجه‌ی درستی از کامپیوتر به دست آوریم، ناچار به اندیشه‌های خود آنالیز ریاضی موجود، مراجعه کنیم. این اندیشه‌های آنالیز ریاضی را، هر کسی و حتی در سال‌های جوانی و نوجوانی، می‌تواند دنبال کند.

کاملاً روشن است که، به کمک فیلم، چگونه می‌توان سرعت را پیدا کرد. اگر توپ، در عکس اول در ارتفاع ۷ فوتی و در عکس بعدی که ۱/۰۰۵ ثانیه بعد گرفته شده است در ارتفاع ۳/۰۰۷ فوتی واقع باشد، با تقسیم فاصله طی شده بر زمانی که طول کشیده است، سرعت ۳ فوت در ثانیه را به دست می‌آوریم. به همین ترتیب در حالت کلی: اگر دوربین ما، از حادثه‌ای، در فاصله زمان‌های h عکس بگیرد و موضع‌های متوالی شیء را در فاصله‌های $a, b, c, d, e, \dots$ نشان دهد، سرعت آن با خارج قسمت‌های زیر، ارزیابی می‌شود:

$$\frac{b-a}{h} \text{ و } \frac{c-b}{h} \text{ و } \frac{d-c}{h} \text{ و } \frac{e-d}{h} \text{ و } \dots$$

برای ارزیابی شتاب، یاد آوری می‌کنیم که شتاب با سرعت همان رابطه‌ای را دارد که سرعت با مسافت داشت. بنابراین، باید همان محاسبه را تکرار کنیم. هر جمله را از جمله بعدی کم و، نتیجه‌را، بر h تقسیم می‌کنیم. نتیجه محاسبه شتاب‌ها، به صورت خارج قسمتهای زیر درمی‌آید:

$$\frac{c-2b+a}{h^2}, \quad \frac{d-2c+b}{h^2}, \quad \frac{e-2d+c}{h^2}, \dots$$

در آنالیز ریاضی، اگر فاصله s به صورت تابعی از t ، با معادله $s = f(t)$ داده شده باشد، سرعت را به صورت $\frac{ds}{dt}$ یا $f'(t)$ ، و شتاب را به صورت

$\frac{d^2s}{dt^2}$ یا $f''(t)$ نشان می‌دهند. آنالیز، علاوه بر حرکت‌ها، در نمودارها هم

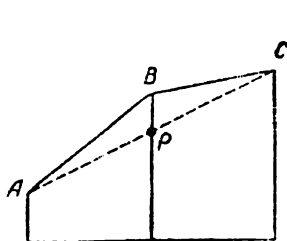
به کار می‌رود. اگر نمودار $y = f(x)$ را داشته باشیم، آن وقت $\frac{dy}{dx}$ یا $f'(x)$ ،

شیب آن را اندازه می‌گیرد، و $\frac{d^2y}{dx^2}$ یا $f''(x)$ ، نشان می‌دهند که انحنای

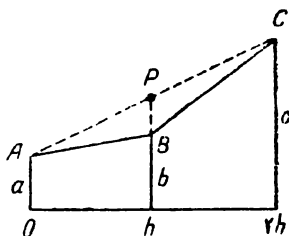
منحنی چگونه است. جایی که $f''(x)$ مثبت باشد، منحنی به فنجان و ناو شباهت دارد و جایی که $f''(x)$ منفی باشد، به طاق قوس‌دار.

امیدواریم که بتوانیم تفسیر هندسی نظیر را، برای سرعت‌ها و شتاب‌های تقریبی پیدا کنیم و، در واقع هم، چنین تفسیری ممکن است. همان‌طور که در

شکل ۵۸ دیده می‌شود، $\frac{b-a}{h}$ و $\frac{c-b}{h}$ ، شیب خط‌های راست AB و BC



شکل ۵۹



شکل ۵۸

را اندازه می‌گیرند. عبارت $\frac{c-2b+a}{h^2}$ را، که با $f''(x)$ ارزیابی می‌شود،

می‌توان به ترتیب زیر، تفسیر کرد. روی شکل ۵۸، نقطه P ، وسط AC است بنابراین: $P = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$ (شکل ۶ و بحث مربوط به آن را ببینید). با توجه به این دستور و مختصات نقطه‌های $A(0, a)$ و $C(2h, c)$ ، مختصات نقطه $P(h, \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c)$ به دست می‌آید. اگر B به مختصات (h, b) باشد، ارتفاع

نقطه P نسبت به B ، برابر $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c - b$ یا $\frac{1}{2}(c - 2b + a)$ می‌شود بنابراین، مقدار $\frac{c - 2b + a}{h^2}$ ، به اندازه $\frac{2}{h^2}$ برابر ارتفاع BP است. وقتی که

این مقدار مثبت باشد، P در بالای B (مثل شکل ۵۸) و وقتی که منفی باشد، در زیر B (مثل شکل ۵۹) قرار دارد. در حالتی که این مقدار برابر صفر باشد، P بر B منطبق می‌شود، یعنی A, B, C روی یک خط راست قرار می‌گیرند. در مسیر خود، به یک دشواری برخورد می‌کنیم که، در آنالیز ریاضی

واقعی، پیش نمی‌آید. خارج قسمت $\frac{b-a}{h}$ ، معرف شیب، در هر نقطه خط

راست AB است، و ما نمی‌دانیم که آیا آن را به مقدار $f'(0)$ (شیب در نقطه A) و یا $f'(h)$ (شیب در نقطه B) هم می‌توان مربوط دانست یا نه؟ از آن جا که بهتر است مناسب‌ترین راه را انتخاب کنیم، می‌توانیم با آن، و برای هر دو مورد مثل قانون کلی عمل کنیم. درباره مقدار $\frac{c - 2b + a}{h^2}$ ، با آزادی کمتری

رو به رو هستیم. دیدیم که این مقدار، با طول BP متناسب است، یعنی به نقطه B بستگی دارد که نقطه وسط، از بین سه نقطه مفروض است. به همین مناسبت، بهتر است خارج قسمت مفروض را به ارزیابی $f''(x)$ در نقطه B مربوط کنیم، تا نقطه A یا نقطه C .

می‌توان تصور کرد که، شکل ۵۸، بخشی از سیم کشیده‌ای است که در فصل چهارم درباره آن صحبت کردیم. کشش سیم می‌خواهد آن را طوری راست کند که، مثل این که، نقطه B به سمت نقطه P (که با نقطه‌های A و C روی یک خط راست واقع است) جذب می‌شود. تعجبی ندارد که، اگر چنین محاسبه‌ای

را برای سیمی باکشش برابر ۱ انجام دهیم، نشان می‌دهد، نیرویی که سیم را به طرف بالامی‌کشد، برابر است با $\frac{c-2b+a}{h}$. این ارزیابی ما برای

$hf''(x)$ است. از آن‌جا که ذره‌های مورد بررسی، در فاصله‌هایی برابر h نسبت به یکدیگر قرار دارند، معلوم می‌شود که نیروی به طرف بالا، بر هر واحد طول برابر است با $f''(x)$. این حل، تاییدی است بر آنالیز ریاضی در بررسی سیمی که اندکی از حالت تعادل خود، خارج شده باشد.

اگر همان طور که در ادبیات فنی مرسوم است، از نشانه‌گذاری‌های $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ به جای $a, b, c, d, e, \dots$ استفاده کنیم، ارزیابی ما، به این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} f'(nh) \sim \frac{a_{n+1} - a_n}{h} \\ f''(nh) \sim \frac{a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1}}{h^2} \end{cases} \quad (1)$$

علامت $\sim$ به معنای «ارزیابی می‌شود همچون» یا «به تقریب برابر است با» می‌باشد. برابری اول، $\frac{b-a}{h}$ را، به عنوان ارزیابی $f'(x)$ در نقطه A روی شکل ۵۸، تعبیر می‌کند. در حالتی که بخواهیم $f''(x)$ را در نقطه B ارزیابی کنیم، باید برابری زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} f'(nh) \sim \frac{a_n - a_{n-1}}{h} \\ f''(nh) \sim \frac{a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1}}{h^2} \end{cases} \quad (2)$$

با استفاده از این تقریب‌ها، در واقع، مسأله آنالیز ریاضی را به مسأله جبر تبدیل کرده‌ایم. به این ترتیب، معادله دیفرانسیلی که $f(x)$ ، $f'(x)$ و $f''(x)$ را به هم مربوط می‌کند، به معادله جبری معمولی تبدیل می‌شود که a_{n-1} ، a_n و a_{n+1} را به هم بستگی داده است. سر آخر، مسأله آنالیز ریاضی، به مسأله‌ای از حساب منجر می‌شود که، حل آن، با محاسبه‌هایی شبیه آن چه

برای پیدا کردن جمله‌های ۵، ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ... از دنباله فیوناچی لازم بود، انجام می‌گیرد.

به عنوان مثال، معادله دیفرانسیلی $3f + 3/7f' + f'' = 0$ را در نظر می‌گیریم. این معادله می‌تواند در دستگاهی که از یک جرم در حال نوسان که به سیمی وصل شده باشد، به وجود آید. مایع کشنده‌ای (مثل، جریانی تند)، مانع حرکت جرم می‌شود و نقش یک فنر را، به عهده دارد. فرض می‌کنیم، به عنوان h ، عدد $0/1$ را انتخاب کرده باشیم که متناظر است با فیلمی که در هر ثانیه ۱۰ عکس برمی‌دارد. با استفاده از معادله (۲) و با توجه به این که $\frac{1}{h^2} = 100$ و $\frac{1}{h} = 10$ ، معادله دیفرانسیلی را به این صورت می‌نویسیم:

$$100(a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1})) + 37(a_n - a_{n-1}) + 3a_n = 0$$

که بعد از ساده شدن، چنین می‌شود:

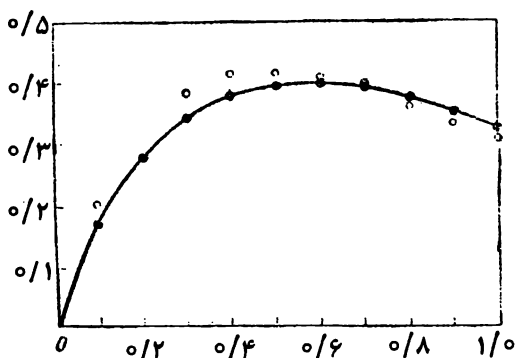
$$a_{n+1} = 1/6a_n - 0/63a_{n-1}$$

اگر بخواهیم، می‌توانیم، بایک حسابگر، روی این معادله تفاوتی عمل کنیم. با دادن مقدارهای دلخواه a_0 و a_1 در برابری $a_2 = 1/6a_1 - 0/63a_0$ ، می‌توانیم a_2 را پیدا کنیم؛ سپس، با استفاده از a_1 و a_2 ، مقدار a_3 را به دست می‌آوریم و غیره. از طرف دیگر، برای جست و جوی دنباله، می‌توانیم از قاعده حل معادله‌های تفاوتی - که قبلاً در همین فصل داده ایم - استفاده کنیم. بر اساس آن، به دست می‌آید: $a_n = A(0/9)^n + B(0/7)^n$. اگر به عنوان مبنا فرض کنیم: $a_0 = 0$ و $a_1 = 0/2$ ، به دست می‌آید: $A = 1$ و $B = -1$ و، بنابراین، خواهیم داشت: $a_n = (0/9)^n - (0/7)^n$. با این وسیله یا با روش حسابی قبلی، دنباله را می‌نویسیم:

$$0, 0/2, 0/32, 0/386, 0/416, 0/422, 0/413, 0/395, \dots$$

که در آن، عددهایی که به دنبال $0/395$ می‌آیند، به تدریج به صفر نزدیک می‌شوند.

جمله‌های دنباله را، روی شکل ۶۰، با دایره‌های کوچکی نشان داده ایم. در همان جا، منحنی نمایش جواب نظری دقیق معادله دیفرانسیلی اولیه هم



شکل ۶۰

داده شده است؛ می بینید که، حتی با تقریب نامناسبی که در نظر گرفته بودیم، باز هم طرح کلی درستی برای نوسان جرم به دست آورده ایم. اگر به عنوان h ، مقدارهای $0/01$ و $0/001$ را انتخاب کنیم، به تقریب بهتری می رسیم. می توان ثابت کرد که (در معادله دیفرانسیلی مفروض)، می توانیم، با کوچک کردن h ، به تقریبی با هر دقت دلخواه برسیم.

یادداشتی درباره معادله دیفرانسیلی

جواب دقیق معادله دیفرانسیلی مفروض $f'' + 3/7f' + 3f = 0$ عبارت است از $f(x) = Ae^{-1/2x} + Be^{-2/5x}$. این جواب، معمولاً، با قاعده ای به دست می آید که قاعده حل معادله های تفاوتی را به یاد می آورد؛ تنها، در این جا، قاعده ۱ می گوید: «جواب را به صورت $f(x) = e^{mx}$ جست وجو کنید. در این مورد هم، همان اعتراض قبلی برای شاگردان پیش می آید: «چرا باید جواب را به این صورت جست وجو کنیم؟» راهی که قبلاً برای روشن کردن این وضع انتخاب کردیم، کافی است تا طبیعی بودن این صورت جواب را نشان دهد. اولاً، این معادله دیفرانسیلی، حالت حدی همان معادله های تفاوتی است که قبلاً مطالعه کرده ایم. عقلانی است اگر در این جا هم، مناسب بودن این روش را بپذیریم (مابه اثبات آن نمی پردازیم). ثانیاً، صورتی که برای جواب توصیه می شود، هیچ تازگی خاصی ندارد. اگر e^{mx} را r بنامیم،

به دست می آید: $e^{mx} = r^x$ ، ولی r^x شبیه r^* است که، به وسیله آن، جواب معادله تفاوتی را پیدا می کردیم. به این ترتیب، کاملاً طبیعی است که جواب معادله دیفرانسیلی را، به صورت r^x جست و جو کنیم. صورت e^{mx} ، کاملاً هم ارز آن است، ولی برای استفاده در محاسبه های آنالیز ریاضی، بسیار مناسب تر است.

مشتق گیری جزئی

مشتق گیری جزئی، بخشی است که کمتر به آن توجه شده است. بسیاری از کسانی که مبانی آنالیز ریاضی را می دانند، هیچ اطلاعی از مشتق گیری جزئی ندارند. در حالی که، این مفهوم، کاربردهای زیادی دارد. ما کوشش می کنیم، بدون کمک گرفتن از نتیجه گیری های آنالیز ریاضی، اندیشه مشتق جزئی را طرح کنیم.

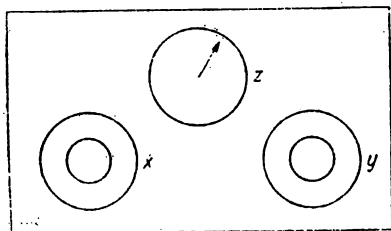
ابتدا، با وسیله ساده ای که در شکل ۶۱ نشان داده ایم، آشنا شویم. این وسیله، از دیسک و دستگاه اندازه گیری تشکیل شده است. دیسک (که در پایین قرار دارد) می تواند بچرخد، وضع آن را با x نشان می دهیم. درجه دستگاه اندازه گیری را (که در بالای دیسک نشان داده ایم)، z می نامیم. دیسک و دستگاه اندازه گیری به طور مکانیکی یا با سیستم الکتریکی به هم مربوط اند، به نحوی که موضع دیسک x را، درجه عقربه z معین می کند.

به این ترتیب: $z = f(x)$. در آنالیز معمولی، $\frac{dz}{dx}$ یا $f'(x)$ به معنای

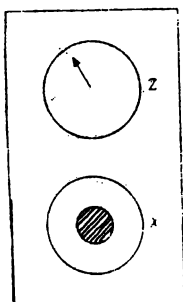
سرعتی است که با آن، درجه عقربه، ضمن چرخش دیسک با سرعت واحد (یعنی وقتی که درجه x دیسک در هر ثانیه، ۱ واحد بالا رود)، تغییر می کند.

اکنون، وسیله دیگری را در نظر می گیریم که در شکل ۶۲ نشان داده شده است. در این جا، درجه دستگاه اندازه گیری، به وضع دو دیسک x و y مربوط است و، بنابراین، $z = f(y, x)$. حالا، صحبت بر سر این است که z ، با چه سرعتی اندازه گیری می شود. از بین همه انواع ممکن چرخش دو دیسک، نسبت به هم، دو حالت عادی تر را انتخاب می کنیم.

در حالت اول، دیسک y بی حرکت است و دیسک x با سرعت واحد



شکل ۶۲

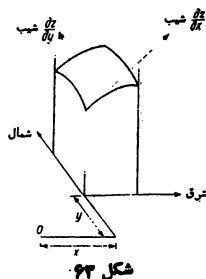


شکل ۶۱

می چرخد. سرعتی که با آن، درجه z ترقی می کند، با علامت $\frac{\partial z}{\partial x}$ نشان داده می شود و آن را مشتق جزئی (یا مشتق نسبی) تابع z نسبت به x می نامند. در حالت دوم، وضع برعکس است: دیسک x بی حرکت است و دیسک y با سرعتی واحد می چرخد. سرعت حاصل در تغییر z ، با $\frac{\partial z}{\partial y}$ نشان داده می شود.

حالا به نمونه عینی دیگری می پردازیم. (x, y) را مختصات نقطه دلخواهی از نقشه، و $z = f(x, y)$ را، ارتفاع نقطه (x, y) نسبت به سطح دریا می گیریم. در حالت اول، y ثابت می ماند و x با سرعت ۱ ترقی می کند؛ در این صورت $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، سرعت ترقی ارتفاع نسبت به سطح دریا را، ضمن حرکت به شرق با سرعت ۱، معین می کند. این سرعت، شیب محل را در جهت شرق، مشخص می کند (شکل ۶۳). به همین ترتیب، حالت دوم، متناظر است با حرکت به طرف شمال با سرعت ۱، و $\frac{\partial z}{\partial y}$ ، شیب محل را به سمت شمال مشخص می کند^۱.

۱. دقیق تر، $\frac{\partial z}{\partial y}$ و $\frac{\partial z}{\partial x}$ برابرند با تانژانت زاویه شیب (ضریب زاویه) مماس های بر منحنی هایی که، به ترتیب، از مقطع های متناظر سطح $z = f(x, y)$ به دست می آید. م.



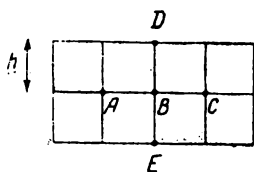
مقدارهای $\frac{\partial z}{\partial y}$ و $\frac{\partial z}{\partial x}$ را می‌توان، درست شبیه $f'(x)$ ، ارزیابی کرد.

درعکس برداری محل، نمی‌توان ارتفاع هر نقطه آن را روی نقشه قرار دارد. می‌توانیم نقشه را با شبکه‌ای از مستطیل‌ها بپوشانیم (شکل ۶۴ را ببینید) و ارتفاع رانها در نقطه‌های برخورد آن‌ها اندازه بگیریم. اگر شبکه، سوراخ‌های کوچکی داشته باشد و دورنمای آن خیلی ناهموار نباشد، باین روش، می‌توان به خوبی، پستی و بلندی‌های محل را مجسم کرد.

ارتفاع محل را در نقطه‌های $A, B, C, \dots$ ، به ترتیب، $a, b, c, \dots$ می‌نامیم. و فرض می‌کنیم که شبکه، از مربع‌هایی به ضلع h تشکیل شده باشد. اگر در جهت افقی، از نقطه A ، به اندازه فاصله h حرکت کنیم، به ارتفاع $b-a$ بالامی‌رویم. نسبت $\frac{b-a}{h}$ در این جهت، شیب قطعه AB ، یعنی

$\frac{\partial z}{\partial x}$ را ارزیابی می‌کند. به همین ترتیب، $\frac{b-e}{h}$ ، شیب را در قطعه EB

اندازه می‌گیرد و تصویری درباره مقدار $\frac{\partial z}{\partial y}$ به ما می‌دهد.



شکل ۶۴

۱. در بعضی مسائله‌ها، بهتر است به جای مربع، از مستطیل استفاده کنیم.

همه این جریان را می‌توان درباره $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ تکرار کرد. چون

$\frac{\partial z}{\partial x}$ نشان می‌دهد که z ، ضمن حرکت به طرف شرق، باچه سرعتی تغییر می‌کند.

می‌توان دوباره پرسید که $\frac{\partial z}{\partial x}$ ضمن حرکت در همین جهت، باچه سرعتی تغییر

می‌کند. $\frac{\partial z}{\partial x}$ را در قطعه‌های AB و BC ارزیابی می‌کنیم. کسرهای $\frac{b-a}{h}$ و $\frac{c-b}{h}$

به دست می‌آید. تفاضل آن‌ها، برابر می‌شود با $\frac{c-2b+a}{h}$. چون

این تفاضل، موجب حرکت به ارتفاعی برابر h می‌شود، بنابراین، برای تعیین سرعت تغییر شیب باید تفاضل حاصل را بر h تقسیم کنیم. در

نتیجه، به دست می‌آید: $\frac{c-2b+a}{h^2}$. با این عبارت آشنا هستیم و آن را،

قبلاً، به عنوان ارزیابی $f''(x)$ دیده بودیم. در واقع، در این جا، بایک موقعیت سروکار نداریم و، اگر مقطع قائم محلی را در طول خط راست ABC به دست آوریم، شکل کاملاً شبیه شکل ۵۸ پیدا می‌شود. برای مقداری که هم اکنون

پیدا کردیم، علامت $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ را انتخاب کرده‌اند. و این، علامت $\frac{d^2 z}{dx^2}$ از مقدمه

آنالیز ریاضی را به خاطر می‌آورد. به کار بردن d به جای ∂ نشان می‌دهد که در تابع، متغیر دیگری هم وجود دارد که در روند مورد بررسی ما بی‌تغییر باقی مانده است و تنها x تغییر می‌کند.

نماد $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ هم به همین مفهوم به کار می‌رود و خصلت مقطع محل را

روی صفحه قائم و در جهت شمال مشخص می‌کند؛ این مقدار با کسر

$$\frac{d-2b+e}{h^2}$$

ارزیابی می‌شود.

در هر دو حالت، حرف b در وسط قرار دارد، بنابراین، کسرها را مربوط

به مقدارهای $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ در نقطه B می‌دانیم.

مسأله‌ای از نظریهٔ الکتریسیته

جالب این است که، با همین بحث کوتاه، می‌توان امکان مساعدی برای به‌دست آوردن معادلهٔ زیر پیدا کرد:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

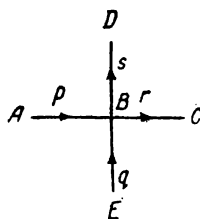
که برای جریان الکتریسیته در لامل یا تیغهٔ مسی، صدق می‌کند. این مسألهٔ جالب در زمینهٔ دانش‌های طبیعی به‌دست آمده و به نام معادلهٔ لاپلاس مشهور است. عبارت سمت چپ برابری را لاپلا سین V می‌نامند و، به طور خلاصه، با نماد $\Delta^2 V$ یا $\nabla^2 V$ نشان می‌دهند.

تیغهٔ مسی نازکی را در نظر بگیرید که همه جا متجانس باشد و در همه جا، ضخامت و مقاومتی یکسان داشته باشد. در نقطه‌های مرزی تیغه، یک باتری وصل کرده‌ایم که، در نتیجهٔ آن، جریان‌های الکتریسیته از ورقه می‌گذرد، و ما می‌خواهیم، نحوهٔ انتشار این جریان‌ها را بررسی کنیم.

سعی می‌کنیم مسأله را ساده کنیم. اگر به یک دستمال نگاه کنید، در نظر اول، سطح آن را کاملاً پرمی‌بینید. ولی اگر نگاه خود را دقیق‌تر کنید، متوجه می‌شوید که، دستمال، از نخ بافته شده است. اگر مادهٔ اولیه را از مس انتخاب کرده باشیم و دستمال را، به نحوی، بامس بافته باشیم، آن وقت، ویژگی‌های الکتریکی «دستمال مسی»، به ویژگی‌های الکتریکی صفحهٔ مسی، خیلی نزدیک خواهد بود. به این مناسبت، به جای صفحهٔ مسی، شبکه‌ای از مفتول‌های نازک مسی را در نظر می‌گیریم؛ این شبکه، با شبکه‌ای که در شکل ۴۶ نشان داده‌ایم، خیلی شبیه خواهد بود، امیدواریم که این «تغییر» مسألهٔ ما را خیلی تحریف نکند.

اکنون باید مطالعه کنیم که، الکتریسیته، در این شبکهٔ مفتولی، چگونه جریان پیدا می‌کند! در این جا، دو قانون کاملاً ساده عمل می‌کند، قانون اول می‌گوید که: جریان الکتریسیته در ماده، کاملاً شبیه جریان آب در لوله است.

یعنی، تمامی جریانی که به نقطه‌ای وارد می‌شود، باید از آن خارج شود. مثلاً، اگر جریان‌هایی را که به نقطه B وارد می‌شوند، q و p ، و جریان‌هایی را که از آن خارج می‌شوند، r و s بنامیم (شکل ۶۵ را ببینید)، طبق این قانون باید داشته باشیم: $r + s = p + q$. مقدار کلی جریان‌ها، باهم برابرند.



شکل ۶۵

قانون دوم، قانون اهم است. هر نقطهٔ رسانا، با عدد V مشخص می‌شود که پتانسیل نام دارد. پتانسیل، چیزی است که ارتفاع را برای نیروی ثقل، و درجهٔ حرارت را برای گرما، به‌خاطر می‌آورد. آب از بلندی به طرف پستی جریان می‌یابد؛ گرما از محلی که درجهٔ حرارت بیشتری دارد، به محلی که درجهٔ حرارت آن کمتر است؛ منتقل می‌شود؛ جریان الکتریسیته هم، از نقطهٔ با پتانسیل بالاتر به طرف نقطهٔ با پتانسیل پایین‌تر تعاقب دارد. پتانسیل نقطه‌های A, B, C, D و E را، به‌ترتیب، a, b, c, d, e می‌نامیم. اگر برق از نقطهٔ A به B جریان دارد (آن‌طور که در شکل ۶۵ می‌بینید)، به معنای آن است که پتانسیل a باید بالاتر (بیشتر) از پتانسیل b باشد. سقوط پتانسیل، ضمن عبور از A به B ، برابر است با $(a - b)$ ولت. بنابراین قانون اهم، جریان برقی که از A به B وجود دارد، متناسب با این سقوط پتانسیل است. برای سادگی کار، فرض می‌کنیم که جریان برق جاری از A به B ، نه‌تنها متناسب بلکه برابر $a - b$ باشد. یعنی $p = a - b$. به همین ترتیب، خواهیم داشت: $q = e - b$ ، $r = b - c$ و $s = b - d$. اگر این مقادارها را در معادلهٔ $p + q = r + s$ - که از قانون اول به دست آوردیم - قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$a - 2b + e = 2b - c - d$$

این معادله را، به شیوه‌های مختلفی، می‌توان تبدیل کرد. اگر آن را

نسبت به b حل کنیم. به دست می آید:

$$b = \frac{1}{4}(a+c+d+e)$$

و این، نتیجه‌ای جالب است؛ این رابطه نشان می‌دهد که پتانسیل نقطه B برابر است با واسطه عددی پتانسیل‌های چهار نقطه مجاور آن :

E, D, C, A و E .

اکنون اگر دوباره به معادله قبلی برگردیم و آن را به صورت

$$(c - 2b + a) + (d - 2b + e) = 0$$

بنویسیم، آن وقت، ارزیابی‌هایی را که قبلاً برای $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ به دست

آورده بودیم، به خاطر می‌آورد. اگر معادله را به h^2 تقسیم کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{c - 2b + a}{h^2} + \frac{d - 2b + e}{h^2} = 0 \quad (3)$$

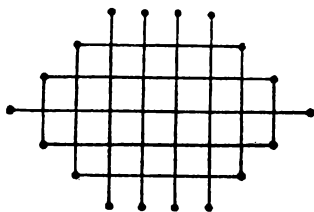
و این معادله، معادله زیر را به ما تلقین می‌کند:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

و این، همان معادله لاپلاس است.

شبکه‌های کشیده شده و حباب‌های صابون

معادله لاپلاس، کاربردهای زیادی دارد. یکی از آن‌ها، بیش از همه، راکت تئوسی را به خاطر می‌آورد که تاب برداشته باشد. روی شکل ۶۶، قطعه کوچکی از یک تور نشان داده شده که محکم کشیده شده باشد. پیش خود تصور کنیم که تور، در ابتدا، روی میز پهن شده باشد، بعد، نقطه‌های مرزی آن را به ارتفاع‌های مختلفی روی میز بالا بیاوریم و آن‌ها را، در این وضع، محکم کنیم. از وزن تور صرف نظر می‌کنیم. اکنون، شکل ۶۵ را به عنوان بخشی از این تور در نظر می‌گیریم. مقدارهای $a, d, c, \dots$ عبارتند از ارتفاع نقطه‌های $A, B, C, \dots$ نسبت به میز. با توجه به آنچه، چند صفحه قبل در



شکل ۶۶

بخش «بدل آنالیز ریاضی» از همین فصل گفتیم، $\frac{c-2b+a}{h^2}$ متناسب است با نیروی کششی که نخ ABC در نقطه B و در جهت بالا، تحمل می کند (اگر تور کشش واحدی داشته باشد، این مقدار، در واقع، $\frac{1}{h}$ این نیرو را تشکیل می دهد). به همین ترتیب، $\frac{d-2b+e}{h^2}$ ، متناسب با نیروی کششی است که نخ EBD در نقطه B و در جهت بالا تحمل می کند. اگر تور به حالت تعادل باشد، کل نیروی کشش در نقطه B ، باید برابر صفر باشد. معادله (۳) هم در همین باره صحبت می کند. یعنی، معادله (۳)، شرط تعادل تور را بیان می کند. اگر تصور کنیم که، در این تور، سوراخ ها مرتباً کوچک و کوچکتر می شوند، در حد، به پرده به هم پیوسته ای نزدیک می شود که پرده گوش یا حباب صابون را به خاطر می آورد. فرض می کنیم که معادله (۴)، شرط تعادل چنین پرده ای را می دهد.

قضیه ای وجود دارد: اگر V در حوزه بیضی از معادله لاپلاس صدق کند، آن وقت، V در درون این حوزه، نه ماکزیمم دارد و نه می نیمم. به دو طریق می توان به عقلانی بودن این قضیه قانع شد. دیدیم که مقدار V در نقطه B ، برابر است با واسطه حسابی مقدار آن در چهار نقطه مجاور، و این موافق با وجود ماکزیمم در این نقطه نیست. به طریق فیزیکی، و با در نظر گرفتن تور کشیده شده هم، می توان به این نتیجه رسید. اگر B بالاتر از همه نقطه های مجاور خود باشد، آن وقت، همه نخ های BA ، BC و BD ، نقطه B را به پایین می کشند و این نقطه نمی تواند در چنین وضعی، در حال تعادل باشد.

درواقع، برای این که تور در حالت تعادل باشد، باید دو انحنا، در دو جهت مخالف باشند. از این جا، فرض می کنیم که اگر نخ ABC بخواهد نقطه B را بالا برد (شبیه نخ در شکل ۵۸)، آن وقت، نخ EBD باید نقطه B را پایین بیاورد (آن طور که در شکل ۵۹ دیده می شود). یعنی اگر ABC يك فنجان را به خاطر آورد، EBD باید طاق قوس دار را به خاطر آورد و برعکس.

از بحث های بالا، به طریق دیگری هم می توان استفاده کرد. مسأله مربوط به تور کشیده یا پرده نازک، به علت عینی بودن خود، می تواند به ما کمک کند تا به اهمیت معادله لاپلاس پی ببریم و حتی ویژگی های آن را کشف کنیم. مثلاً، اگر همه نقطه های مرزی تور را درجائی محکم کنیم، آزمایش فیزیکی، به ما تلقین می کند که، این وضع، در عین حال موضع تمامی تور را معین می کند. تاب قاب راکت تنیس هم، وضع راکت را به خوبی مشخص می کند. قاعدتاً باید قضیه ای وجود داشته باشد که، بر طبق آن، بتوان مقدارهای V را در داخل دوره، به کمک مقدارهای V در مرزها، پیدا کرد، به شرطی که V ، جواب معادله لاپلاس باشد. در واقع هم، چنین قضیه ای وجود دارد که، با توجه به شرط های معین قابل قبولی برای V ، همان چیزی را که می خواهیم تنظیم می کند.

به جز این، چون معادله لاپلاس در رشته های کاملاً متفاوتی از دانش، کاربرد دارد، وقتی که در یکی از این رشته ها به نتیجه هایی برسیم، می توانیم با طرح پرسش های مشابهی در رشته های دیگر، جنبه های تازه ای از آن ها را مورد مطالعه قرار دهیم. مثلاً، با حل مسأله مربوط به الکتریسیته، می توان به مطالعه شکل حباب صابون پرداخت.

از آن چه در بالا گفتیم، می توان برای جست و جوی جواب های عددی معادله هم استفاده کرد. در واقع، معادله جبری (۳) همان بستگی را با معادله با مشتقات جزئی (۴) دارد که معادله تفاوتی با معادله دیفرانسیلی داشت.

پایداری

برای هر کسی که با مداد و کاغذ یا ماشین دستی حساب و یا حتی

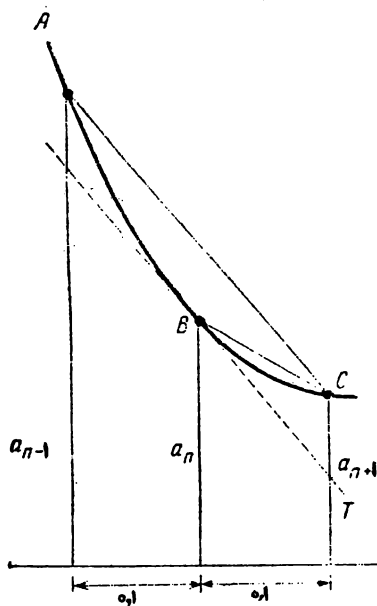
کامپیوتر محاسبه می‌کند، لازم است از دامی که می‌تواند بر جواب معادله دیفرانسیلی ساده $y' = -y$ سایه بیندازد، آگاه باشد. وقتی که جواب این معادله به صورت $y = Ae^{-x}$ معلوم و جدول مقادیرهای تابع e^{-x} در اختیار باشد، به ذهن کسی نمی‌رسد که، آن را، باروشهای محاسبه عددی حل کند. ولی ما، در این جا، به حل عددی آن می‌پردازیم تا متوجه خطری که در هر گام در کمین ماست، بشویم.

از طرح درست، آغاز می‌کنیم. در دستور (۱)، $h = 0.1$ می‌گیریم.

اگر y را به a_n و y' را به $\frac{a_{n+1} - a_n}{0.1}$ تبدیل کنیم، به معادله تفاضتی

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{0.1} = -a_n \quad \text{می‌رسیم که منجر به برابری } a_{n+1} = 0.9a_n \text{ می‌شود}$$

و نشان می‌دهد که هر مقدار برابر با 0.9 مقدار قبلی است و، بنابراین، جمله‌ها به تدریج کوچک می‌شوند. اگر مقدار اولیه y را 1000 بگیریم، داریم: $a_0 = 1000$. اگر محاسبه‌ها را با دقت تا عددهای درست انجام دهیم،



شکل ۶۲

به دنباله مقدارهای ۱۰۰۰، ۹۰۰، ۸۱۰، ۷۲۹، ۶۵۶، ... می‌رسیم، که البته، به خاطر فرض تقریبی ما، با مقدارهای واقعی $1000e^{-x}$ ، تفاوت‌نماییانی دارد. می‌توان کار را به ترتیب زیر بهتر کرد. در شکل ۶۷، مقدار y' در نقطه B برابر است با شیب مماس BT . ما به جای آن، مقدار $\frac{a_{n+1} - a_n}{0.1}$ را گرفتیم

که برابر است با شیب BC . روی شکل دیده می‌شود که برای رسیدن به تقریب شیب BT ، بهتر است از شیب AC استفاده کنیم. این مطلب، ضمن محاسبه هم تأیید می‌شود. به ازای $x=1$ ، مقدار واقعی y' در نقطه B ، به تقریب، برابر است با 0.3679 - . ضمناً، شیب‌های BC و AC ، به ترتیب، برابرند با 0.3501 - و 0.3685 - . خط، نسبت به شیب BC برابر است با 0.0178 و نسبت به شیب AC ، فقط 0.0006 .

به این ترتیب، نتیجه می‌گیریم که، برای به دست آوردن نتیجه دقیق‌تر بهتر است برای y' ، شیب AC ، یعنی $\frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{0.2}$ را در نظر بگیریم.

این رابطه، ما را به معادله $a_{n+1} = a_{n-1} - 0.2a_n$ می‌رساند. در جدول زیر، مقدارهای a_n ، به کمک معادله تفاوتی و با آغاز از مقدارهای $a_0 = 1000$ و $a_1 = 900$ داده شده است. در همین جدول، مقدارهای واقعی جواب، براساس عبارت $1000e^{-x}$ و، همچنین، اشتباه ناشی از جای‌گزین کردن a_n به جای مقدار واقعی، داده شده است. رفتار a_n در جدول، همراه بانوسان‌های محسوسی است. مقدار a_n گاه زیاد و گاه کم می‌شود، ولی خطای انحراف، از لحاظ قدر مطلق، دائماً رو به افزایش است، ضمناً، مقدار واقعی جواب، به طور یکنوا کاهش می‌یابد. نوسان‌های تندی که در این جا دیده می‌شود، معرف خبری ناگوار در باره ارزیابی‌های a_n است: a_n به واقع، کمتر از a_{16} است، و a_{18} و a_{20} هم، از مقدارهای قبلی خود بیشترند.

اگر محاسبه‌ها درست باشد، نسبت به حل معادله $y' = -y$ ، به یک دشواری جدی برخورد کرده‌ایم. توجه کنیم که نوسان در مقدارهای a_n ، کاملاً ناشی از روش محاسبه است و هیچ علت دیگری ندارد.

x	n	α_n	$1000e^{-x}$	U_n
0		1000	1000	
0/1	1	900	905	-5
0/2	2	820	819	+1
0/3	3	736	741	-5
0/4	4	673	670	+3
0/5	5	601	607	-6
0/6	6	553	549	+4
0/7	7	490	497	-7
0/8	8	455	449	+6
0/9	9	399	407	-8
1/0	10	375	368	+7
1/1	11	324	333	-9
1/2	12	311	301	+10
1/3	13	262	273	-11
1/4	14	259	247	+12
1/5	15	210	223	-13
1/6	16	217	202	+15
1/7	17	167	183	-16
1/8	18	184	165	+19
1/9	19	130	150	-20
2/0	20	158	135	+23

اشتباه مربوط به کجاست؟ چنین نوسان تندی، از کجا ناشی می‌شود؟
 با حل معادله تفاوتی $a_n = a_{n-1} - 0.2a_n$ ، به دست می‌آید،
 $a_n = K(0.905)^n + M(-1/105)^n$. این جواب می‌تواند جواب تقریبی
 خوبی برای e^{-x} باشد، به شرطی که فرض کنیم: $M=0$ و $K=1000$.
 در این حالت، به دنباله $1000, 905, 819, 741, \dots$ می‌رسیم؛ که
 مقدارهای آن، در مرحله دقت‌ما، بر مقدارهای واقعی منطبق است. این بهترین
 نتیجه‌ای بود که به دست آوردیم. این نتیجه نشان می‌دهد، همان‌طور که در
 شکل ۶۷ دیده می‌شود، وتر AC ، بهتر از وتر BC ، به شیب مماس نزدیک
 است. و این، توجه ما را نسبت به محاسبه‌ای که انجام دادیم، بیشتر جلب
 می‌کند.

در این جا، حقیقت ناراحت‌کننده دیگری هم وجود دارد: نتیجه‌گیری
 خوب، تنها در حالتی به دست می‌آید که M را برابر صفر گرفته باشیم. جدول‌ما،
 که همراه با نوسان‌های تندی است، با مقدارهای اولیه $a_0 = 1000$ و $a_1 = 905$
 تنظیم شده است که به ازای $K = 997\frac{1}{2}$ و $M = 2\frac{1}{2}$ به دست آمده‌اند. ممکن
 است، اختلاف این مقدارها، با $K = 1000$ و $M = 0$ ناچیز به نظر آید،
 به خصوص که ما با هزارها سروکار داریم. اشکال کار به ضریب M ، یعنی
 $(-1/105)^n$ - و یا دقیق‌تر، به قدر مطلق خود جمله، که با $M(1/105)^n$
 برابر است - مربوط می‌شود. با ترقی n ، قدر مطلق جمله هم، با سرعتی نزدیک
 به ۱۰٪ ترقی می‌کند.

به این ترتیب، نقطه $M = 0$ ، انتخاب کاملاً مناسبی است. در حالی
 که اگر M را عددی مخالف صفر بگیریم (ولو این که عددی کوچک باشد).
 اشتباه حاصل به سرعت رشد می‌کند و مقدار مورد نظر، مرتباً از مقدار حقیقی
 آن فاصله بیشتری می‌گیرد.

طبیعت بسیاری از محاسبه‌ها، ایجاب می‌کند که با اشتباه همراه باشد.
 البته، در حالت دنباله فیوناچی، که همه جمله‌های آن عددهایی درست بودند:
 ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ...، توانستیم محاسبه‌ای دقیق انجام دهیم. و لسی، بیشتر
 مساله‌ها، شامل عددهای کسری و عددهای گنگ‌اند. هیچ ماشین حسابی نمی‌تواند

بابی نهایت رقم ددهی کار کند. وقتی با عدد هایی سروکار داشته باشیم که تعداد رقم های ددهی آن نامتناهی باشد، ناچار آن را گرد می کنیم. مثلاً، اگر محاسبه ها را با دقت تا چهار رقم ددهی انجام دهیم، کسر $\frac{1}{3}$ را $0/3333$ می گیریم، یا حاصل ضرب دو عدد $0/2345$ و $0/1111$ را، که برابر $0/2605205$ می شود، برابر $0/261$ می گیریم، روشن است که، همه این ها، به حساب اشتباه های تقریبی می آیند. کامپیوترها، معمولاً محاسبه ها را تا رقم دهم ددهی انجام می دهند، ولی روشن است که، در آن جا هم، نمی توان از اشتباه فرار کرد. و اگر پاسخ، بعد از میلیون ها عمل به دست آید، روشن است که نتیجه، شامل میلیون ها اشتباه (ولو کوچک) خواهد شد.

هر محاسبه ای، همراه با دشواری هایی است که، در ریاضیات نظری، به آن ها برخورد نمی کنیم. در نظریه، همه کمیت ها، مقدار دقیق خود را دارند؛ در آن جا، مثل این است که آدمی روی دشتی هموار و باز حرکت می کند ولی محاسبه را، می توان به راهی تشبیه کرد که در میان جنگلی انبوه کشیده شده باشد. در برابر ما، راه پرپیچ و خمی است که آن را تعقیب می کنیم، ولی در مسیر خود دائماً به درخت هایی برمی خوریم که مارا گاهی به چپ و گاهی به راست، اندکی منحرف می کند. ولی همه مطلب در این است که، با همه این انحراف های ناچیز، همیشه در مسیر هدف خود قرار گرفته باشیم.

معادله به صورت $0/2a_n = a_{n-1} - a_{n+1}$ ، که در آن، هر اشتباه خصلت افزایش نامعینی دارد، معادله ناپایدار نامیده می شود.

ضرورت احتیاط در نتیجه گیری ها

هر کسی که از روش های این فصل، برای حل مساله های کار بسته؛ استفاده می کند، باید دوسرچشمه ظهور اشتباه را در نظر داشته باشد. اندیشه اصلی ما مبتنی بر این است که روندی با تغییر پیوسته را به روندی ناپیوسته تبدیل می کنیم، که پرش هایی را به همراه دارد.

با این فرض که، این پرش ها، مرتباً کوچک و کوچکتر و تعداد آن ها بیشتر بشود، جواب مساله ناپیوسته را، مرتباً به جواب مساله پیوسته نزدیکتر

می‌کنیم. و اغلب با این روش، به نتیجه مطلوب می‌رسیم، ولی همیشه این‌طور نیست. موردهایی پیدا می‌شود که، بدون این که ظاهر آن تردیدی ایجاد کند، جواب روند پرش‌دار، به‌چیزی نزدیک می‌شود که شباهتی با جواب مسأله پیوسته نخستین‌ما، ندارد.

خطر دوم، به امکان وجود ناپایداری مربوط می‌شود که در بخش قبل از آن یاد کردیم.

نتیجه‌هایی که به کمک کامپیوتر به دست می‌آیند، تنها در حالتی قابل قبول‌اند که اشتباه‌های ناشی از این دو علت، در ارزیابی‌ها، مورد توجه قرار گیرد.

داستانی وجود دارد (ومن منبع آن را به یاد ندارم)، که در آن، کسی که با داده‌های جوی کار می‌کند، طوفان را پیش‌بینی می‌کند. ولی طوفان رخ نداد. علت این ناکامی را، باید در اشتباه‌های ناشی از محاسبه‌های عددی دانست.

۷

در مسیر طبقه‌بندی منظم

در فصل‌های قبل، بر بردارها، ماتریس‌ها، تبدیل‌های خطی، جمع و ضرب ماتریس‌ها و جست و جوی معادله‌هایی که با آن سازگارند، تکیه کردیم. در همه این موردها، از قانون‌های آشنای جبر مقدماتی استفاده کردیم. ولی وقتی که با موضوع‌های غیر عددی سروکار داشته باشیم، ممکن است با انحراف‌های معینی نسبت به قانون‌های عادی برخورد کنیم. مثلاً، در جبر مقدماتی، معادله $x^2 = 1$ ، دو جواب و تنها دو جواب دارد: $x = +1$ ، $x = -1$ ، در حالی که، معادله ماتریسی متناظر آن، یعنی $M^2 = I$ ، به جز جواب‌های $+I$ و $-I$ ، مجموعه‌ای از جواب‌های دیگر هم دارد. مثلاً، در تمرین ۱ فصل دوم دیدیم که معادله $U^2 = I$ در ماتریس $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ صدق می‌کند و درست، همین

معادله $K^2 = I$ در ماتریس دیگر $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ هم صدق می‌کند. در

واقع، معادله $M^2 = I$ در مجموعه بی‌شماری از ماتریس‌های 2×2 صدق می‌کند. و این وضع، حالت عدم اطمینان در ما به وجود می‌آورد. روشن است که، در بسیاری از موقعیت‌ها، جبر مقدماتی، را به نتیجه‌گیری درستی نسبت به ماتریس می‌رساند، ولی حالت‌هایی هم وجود دارد که، جبر مقدماتی، ما را به گمراهی می‌کشاند. بعد از آن که چنین محاسبه‌ای را تمام کردیم، نمی‌دانیم که آیا نتیجه به دست آمده درست است یا نه. روشن است که این مانع را باید برطرف کرد. ولی، چرا معادله درجه دوم، در حالت ماتریس، این گونه رفتار غیر عادی دارد؟ توجه کنیم که، در جبر مقدماتی، می‌توان ثابت کرد که،

معادله $x^2 - 1 = 0$ تنها دوجواب دارد: $1 +$ و $1 -$ به این ترتیب، استدلال می‌کنیم:

$$(1) \quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \quad ;$$

(۲) اگر x ، جواب معادله $x^2 - 1 = 0$ باشد، داریم:

$$(x-1)(x+1) = 0$$

(۳) يك حاصل ضرب، وقتی و تنها وقتی برابر صفر است که دست کم، یکی از عامل‌های آن برابر صفر باشد،

(۴) به نحوی که $x-1$ یا $x+1$ باید برابر صفر شوند؛

(۵) یعنی x باید برابر 1 یا -1 باشد، چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

اکنون، ماتریس $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. قانع می‌شویم

که، این، ماتریس، در معادله $U^2 - I = 0$ صدق می‌کند. اثباتی که در بالا آوردیم، در چه مرحله‌ای برای ماتریس درست نیست؟ (در ۲) به تناقضی

بر نمی‌خوریم، زیرا $U - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ و $U + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. اگر این

دو ماتریس را در هم ضرب کنیم، معلوم می‌شود که $(U - I)(U + I) = 0$. اثبات را در مورد (۴) نمی‌توان به کاربرد، زیرا هیچ کدام از ماتریس‌های حاصل $U - I$ و $U + I$ ، در واقع، برابر صفر نیستند. در این جا، اصل (۳)، صدق نمی‌کند: حاصل ضرب $(U + 1)(U - 1)$ برابر است با 0 ، ولی هیچ کدام از عامل‌ها برابر 0 نیستند.

به این ترتیب، در محاسبه ماتریسی، نمی‌توانیم به هیچ نتیجه‌ای که به کمک جبر مقدماتی و بر اساس اصل (۳) اثبات بالا به دست آمده است، امید بست.

یادآوری می‌کنیم که، این، تنها ویژگی جبر مقدماتی نیست که، ضمن عبور به ماتریس، نیروی خود را از دست می‌دهد. به استدلال زیر، در مورد

ماتریس‌های $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ توجه کنید.

۶) چون $K^2 = I$ و $U^2 = I$ ، پس $K^2 - U^2 = O$ ؛

۷) ولی $(K - U)(K + U) = K^2 - U^2$ ؛

۸) بنابراین $(K - U)(K + U) = O$ ؛

۹) از آن جا، دست کم، یا $K - U = O$ یا $K + U = O$ ؛

۱۰) در نتیجه $K = U$ یا $K = -U$.

کاملاً روشن است که، نتیجه حاصل، نادرست است و می دانیم که، دلیل این نادرستی، این است که، ضمن عبور از (۸) به (۹)، بر قاعده (۳) تکیه کردیم. ولی در واقع، قبل از آن هم، دچار اشتباه شده ایم، زیرا خود معادله (۸) هم نادرست است: چون $K - U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ و $K + U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ،

بنابراین، حاصل ضرب

$$(K - U)(K + U) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ماتریسی مخالف صفر است. از آن جا که حکم ۶) قابل سرزنش نیست، بنابراین باید فرض کرد که اشتباه در برابری ۷) است. در واقع، هم اکنون، قانع شدیم که حاصل ضرب $(K - U)(K + U)$ ، که درست چپ برابری ۷) قرار دارد، مخالف صفر است، در حالی که درست راست، عبارتی برابر صفر قرار دارد. به این ترتیب، قاعده تفاضل دو مجذور را نمی توان درباره ماتریس ها، به عنوان يك قاعده کلی، همیشه به کار برد.

برای روشن کردن علت اشتباه، به خاطر می آوریم که، در جبر سنتی، برابری $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ، از راه ضرب معمولی دو عامل سمت چپ، ثابت می شود. این ضرب را درباره ماتریس های K و U انجام دهیم:

$$\begin{aligned}(K - U)(K + U) &= K(K + U) - U(K + U) = \\ &= K^2 + KU - UK - U^2\end{aligned}$$

در جبر مقدماتی KU و UK را حذف می کنیم و به نتیجه مورد نظر می رسیم. ولی این کار را در مورد ماتریس ها، نمی توان انجام داد، زیرا دو ماتریس

$$KU = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } UK = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ برابر نیستند.}$$

یادآوری می‌کنیم که، این محاسبه را، وقتی می‌توان در چارچوب جبرمقدماتی انجام داد که باماتریس‌های A و B سروکار داشته باشیم، به نحوی که $AB = BA$ باشد، مثلاً برای $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ برای چنین ماتریس‌هایی، برابری $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ کاملاً درست است. وقتی که داشته باشیم: $AB = BA$ ، گوییم که ماتریس‌ها قابل جابه‌جایی هستند. در واقع:

هر ماتریس M ، باماتریس I ، و هر ماتریس دیگری که توانی از M باشد، یعنی M^n ، قابل جابه‌جایی است.

$$MI = IM = M, M.M^n = M^n.M = M^{n+1}$$

از این جا نتیجه می‌شود که چند جمله‌ای، نسبت به ماتریس واحد، با همان قاعده جبرمقدماتی ضرب می‌شود و، ضمناً، همه قاعده‌ها و دستورهای جبرمقدماتی، به قوت خود باقی می‌مانند. مثلاً بدون هیچ نگرانی، می‌توانیم بنویسیم: $(M-I)(M+I) = M^2 - I$. به همین مناسبت، حکم (۱) را، در اثبات، می‌توان برای ماتریس U هم به کاربرد.

خیلی از عمل‌هایی را که در جبرمقدماتی مجاز است، در مورد ماتریس‌ها نمی‌توان به کاربرد. یک مثال: در جبرمقدماتی، برابری $ax = ay$ ، برای $a \neq 0$ ، با برابری $x = y$ متحداست. ولی، چنین اتحادی در مورد ماتریس‌ها، عملی نیست. مثلاً، اگر داشته باشیم:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

آن وقت، Ax و Ay ، هر دو برابر $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ می‌شوند و، در نتیجه، با هم برابرند و ضمناً $A \neq 0$ ؛ با وجود این، X و Y با هم برابر نیستند و این، باز هم به این مطلب مربوط است که، حاصل ضرب ماتریس‌ها ممکن است برابر صفر باشد، در حالی که همه عامل‌های آن مخالف صفر باشند. برابری $AX = AY$ ، با برابری

۱. ماتریس M را مربعی فرض می‌کنیم، یعنی ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن برابر باشند. در مورد چنین ماتریسی، می‌توان M^n را تعریف کرد.

$A(Y-X)=O$ هم ارز است. در همین فصل، باز هم به دو ماتریس مخالف صفر برخورد کرده بودیم، که حاصل ضربی برابر صفر داشتند. در مثال اخیر هم، ماتریس‌های A ، X و Y را طوری انتخاب کرده بودیم که برای آن‌ها داشته باشیم: $Y-X=U+I$ و $A=U-I$. در حالت $AB=O$ ، به شرطی که هر دو عامل A و B مخالف صفر باشند، A و B را مقسوم علیه‌های صفر گویند.

طبقه‌بندی دستگاه‌های ریاضی

به این ترتیب می‌بینیم که، ضمن انجام عمل‌های جبری روی ماتریس‌ها، باید محتاط بود، زیرا بعضی از ماتریس‌ها (ونه همه آن‌ها)، مقسوم علیه‌هایی از صفر هستند، و اغلب (باز هم نه همیشه)، دو ماتریس، از اصل جابه‌جایی پیروی نمی‌کنند.

گاهی با ماتریس‌هایی سروکار داریم که از نوع معینی هستند. مثلاً، می‌توانیم خود را به ماتریس‌هایی از نوع $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ محدود کنیم. برای دو ماتریس P و Q از این نوع، برابری $PQ=QP$ برقرار است و، ضمناً، تنها وقتی داریم: $PQ=O$ ، که P یا Q برابر صفر باشند. بنابراین، این دستگاه ماتریس‌ها، از اصل جابه‌جایی پیروی می‌کند و، ضمناً، شامل مقسوم علیهی از صفر نیست. این ویژگی‌ها، در مورد دستگاه عددهای مختلط هم صدق می‌کنند، چرا که این دستگاه دارای همه ویژگی‌های جبری عددهای حقیقی است. این وضع، می‌تواند مکانیسم عمل‌ها را در مورد عددهای مختلط، به غایت ساده کند. متأسفانه، به دستگاه‌هایی که دارای این ویژگی‌ها باشند، به فراوانی برخورد نمی‌کنیم؛ و معمولاً، باید به انطباق برخی از ویژگی‌های جداگانه، رضایت بدهیم. به این مفهوم، ماتریس 4×4 به صورت زیرشایان توجه است.

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

در این دستگاه ماتریس‌ها، یک کمبود وجود دارد: از اصل جابه‌جایی پیروی نمی‌کند. دستگاه، مقسوم‌علیه صفر ندارد. این، در واقع، یک دستگاه عددهای چهار تایی است، و ماتریس مفروض، به صورت عدد چهار تایی $a+ib+jc+kd$ نمایش داده می‌شود.

دوران دور مبدا مختصات (در هندسه اقلیدسی)، با ماتریس به صورت $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ نشان داده می‌شود، که در آن، a و b عددهایی حقیقی هستند که در برابری $a^2+b^2=1$ صدق می‌کنند. از ضرب دو ماتریس، باز هم ماتریسی از همین نوع به دست می‌آید. این ماتریس، از نظام جابه‌جایی پیروی می‌کند. تقسیم، همیشه ممکن است: برای دو ماتریس مفروض A و B ، همیشه می‌توان ماتریس C را طوری پیدا کرد که داشته باشیم: $C = \frac{A}{B}$ ؛ به نحوی که $CB=A$ باشد. ولی، اگر بخواهیم در درون دستگاه مفروض باقی بمانیم، باید از جمع، صرف نظر کنیم. مجموع دو ماتریس از این نوع، در حالت کلی، یک دوران نیست (اگر، با وجود این، بخواهیم عمل جمع را انجام دهیم، آن وقت در دستگاه ماتریس‌هایی قرار می‌گیریم که معرف عددهایی مختلط هستند). به این ترتیب، در هیاتی قرار می‌گیریم که، تنها یک عمل پایه‌ای دارد: ضرب. عمل ضرب (و همچنین، عمل عکس آن، تقسیم)، رفتاری عادی دارد.

در مجموعه وسیع‌تری که از ماتریس‌های به صورت $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ، با دترمینان $ad-bc=1$ ، تشکیل شده است، باز هم می‌توانیم عمل‌های ضرب و تقسیم را انجام دهیم، ولی نمی‌توانیم به جمع و تفریق پردازیم، مجموع دو ماتریس از این نوع، معمولاً، با شرط $ad-bc=1$ سازگار نیست. در این دستگاه عمل ضرب، قابل جابه‌جایی نیست و، بنابراین، باید بین دو نوع تقسیم، اختلاف قایل شویم. برای هر A و B ، می‌توان C و D را طوری پیدا کرد که، برای آن‌ها، برابری‌های $CB=A$ و $BD=A$ برقرار باشد که، ضمناً، C و D در حالت کلی، با هم فرق دارند.

این چهار مثال، گواه بر گوناگونی دستگاه‌های ریاضی مورد مطالعه

ماست و، به همین مناسبت، ضرورت پیدا کردن روشی برای طبقه‌بندی و جست‌وجوی نام معینی برای آن‌ها، احساس می‌شود. دستگاهی که عددهای مختلط را به یادمی آورد و دارای همه ویژگی‌های جبری است، میدان نامیده می‌شود. دستگاه شبیه عددهای چهارتایی، که پاسخ گوی به همه خواست‌ها به استثنای جابه‌جایی ضرب است، میدان اریب^۱ نام دارد. دورانی که در بالا بررسی کردیم، از گروه جابه‌جایی است که، اغلب، آن را گروه آبلی می‌گویند (به نام آبل، ریاضی‌دان نروژی). ماتریس $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ که با شرط $ad - bc = 1$

سازگار باشد، به طور ساده، یک گروه را تشکیل می‌دهد.

برای این که دستگاه، با یکی از این لقب‌ها، نامیده شود، باید از بوته آزمایش‌های معینی بگذرد. بعد از گذراندن این آزمایش‌ها، آن وقت می‌توانیم دستگاه به صورت مفروض را، با همان ویژگی‌ها شرح دهیم. مثلاً، یک بار برای همیشه، ثابت می‌کنیم که، در هر میدانی، معادله درجه دوم، نمی‌تواند بیش از دو جواب داشته باشد، آن وقت، می‌توانیم این ویژگی را برای هر دستگاه ریاضی، که میدان باشد، در نظر بگیریم. به این ترتیب، دیگر نیازی ندارد که یک ویژگی یا نتیجه‌گیری را، ضمن عبور از یک دستگاه به دستگاه خویشاوند آن، دوباره ثابت کنیم.

معلوم است که بیشتر اختلاف‌های دودستگاه ریاضی نسبت به یکدیگر، در شکل ماتریسی آن‌ها ظاهر می‌شود. و این، یکی از دلایل‌های مطالعه ماتریس‌هاست. ولی نباید گمان کرد که، تنها راه، بررسی ماتریس‌هاست. می‌توان هر دستگاه را مورد مطالعه قرارداد و جای آن را در طبقه‌بندی ما پیدا کرد. مثلاً، می‌توانیم معین کنیم که دستگاه‌هایی مثل عددهای درست، عددهای گنگ، عددهای حقیقی و عددهای زوج، و یا عمل‌هایی که شامل مشتق‌گیری، انتگرال‌گیری و غیر آن هستند، چه جایی دارند.

در این جا، خواست‌هایی را برمی‌شمایم که می‌توان، برای طبقه‌بندی دستگاه‌ها، از آن‌ها استفاده کرد. برای هر دستگاهی، روشن می‌کنیم که کدام یک

۱. میدان را هیأت و میدان اریب را هیأت کج هم گفته‌اند. م.

از گزاره‌های زیر در مورد آن صادق است.

۱. برای هر دو عضو a و b از این دستگاه، عضوی از همان دستگاه پیدا می‌شود که به صورت $a+b$ است.

۲. جمع قابل جابه‌جایی است: $a+b=b+a$.

۳. جمع شرکت‌پذیر است: $a+(b+c)=(a+b)+c$.

۴. دستگاه دارای عضو 0 است، به نحوی که برای هر عضو a از دستگاه داشته باشیم: $a+0=a$.

۵. در دستگاه، تفریق، تعریف شده است، یعنی، برای هر دو عضو a و b ، معادله $a+x=b$ ، یک جواب منحصر دارد.

۶. برای هر دو عضو a و b از دستگاه، عضوی از همان دستگاه، به صورت ab وجود دارد.

۷. ضرب، از ویژگی جابه‌جایی پیروی می‌کند: $ab=ba$.

۸. ضرب دارای ویژگی شرکت‌پذیری است $a(bc)=(ab)c$.

۹. دستگاه دارای عضو I است که برای هر عضو a از دستگاه داریم: $aI=Ia=a$.

۱۰. در دستگاه، تقسیم، تعریف شده است: برای هر دو عضو a و b از دستگاه، هر یک از معادله‌های $ax=b$ و $ya=b$ ، با شرط $a \neq 0$ ، تنهاییک جواب دارند.

۱۱. قانون پخش‌پذیری برقرار است:

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$(b+c)a=ba+ca$$

۱۲. دستگاه دارای مقسوم‌علیه صفر نیست: یعنی، وقتی و تنها وقتی $ab=0$ ، که $a=0$ یا $b=0$.

دستگاهی که با هر ۱۲ خواست سازگار باشد، میدان نامیده می‌شود. هدهای گویا، عددهای حقیقی و عددهای مختلط، نمونه‌هایی از میدان هستند. شرط‌هایی که در بالا آوردیم، کاملاً مستقل از یکدیگر نیستند. مثلاً، اگر دستگاهی با یازده شرط اول سازگار باشد، خودبه‌خود، با شرط دوازدهم

هم سازگار خواهد بود.

دستگاهی که با همه شرطها، به جز شرط هفتم سازگار باشد، میدان اریب نامیده می شود. عددهای چهارتایی، نمونه ای از میدان اریب را تشکیل می دهند.

دستگاهی که با شرطهای ۶، ۸، ۹ و ۱۰ سازگار باشد، يك گروه را تعریف می کند. به عنوان نمونه هایی از گروه، می توان از همه دوران های دور مبداء مختصات؛ همه ماتریس های 2×2 با شرط $ad - bc = 1$ ؛ عددهای مثبت؛ عددهای حقیقی با حذف ۰؛ زوج عدد (۱ - و ۱)؛ عددهای به صورت 10^n ، که در آن، n عدد درست دلخواهی (مثبت، منفی یا صفر) است، نام برد. همه این گروه ها را، گروه ضربی هم می نامند، که البته، ممکن است اصطلاح خوبی به نظر نرسد. این خیلی ساده به این معناست که، عمل را، «ضرب» می نامیم، ولی، ویژگی های جمع و ضرب، از نظر صوری، یکسان است. خواست های ۷ و ۸، کاملاً شبیه خواست های ۲ و ۳ است. همین شباهت بین جمع و ضرب است که امکان لگاریتم گرفتن را به وجود می آورد، روشی که برای تبدیل ضرب به جمع کشف شده است.

شباهت به معنای آن است که، در علامت گذاری، به نحوی زیاده روی شده است. به همین مناسبت، موافقت می کنیم که علامت «+» تنها برای دستگاه های قابل جابه جایی مورد استفاده قرار گیرد. ضرب را هم می توان، هم برای دستگاه های ضربی و هم برای دستگاه های غیر جابه جایی به کار برد. این توافق نشان می دهد که، چرا نمی توان شرط های ۴ و ۵ را دقیقاً به موازات خواست های ۹ و ۱۰ قرارداد.

گروه جابه جایی، که از علامت «+» استفاده می کند، عبارت است از دستگاهی که با خواست های ۱ تا ۵ سازگار باشد. به عنوان نمونه هایی از گروه های جابه جایی، می توان از عددهای درست؛ عددهای درست بخش پذیر بر ۷ و هر فضای برداری دلخواه نام برد. اگر ترجیح بدهیم از علامت ضرب استفاده کنیم، آن طور که مثلاً در مورد ماتریس هایی که دوران بودند، عمل می کردیم، آن وقت باید خواست های ۶ تا ۱۰ را مورد آزمایش قرار دهیم.

مفهوم مهمی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که تا کنون یادی از آن نکرده‌ایم؛ و این، عبارت است از مفهوم حلقه. دستگاه همه عددهای زوج

$$\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots$$

يك گروه جابه‌جایی را تشکیل می‌دهد که از علامت «+» استفاده می‌کند. با وجودی که، عمل ضرب هم، مثل عمل جمع، در این دستگاه، قابل تعریف است، نمی‌توان آن را میدان دانست، زیرا این دستگاه، با شرط ۱۰ سازگار نیست. در این دستگاه، عمل تقسیم، ممکن نیست، زیرا مثلاً از تقسیم ۶ بر ۲، به عددی فرد می‌رسیم که به این دستگاه تعلق ندارد؛ در مورد ۶:۲،

وضع از آن هم بدتر است و به کسر $\frac{1}{3}$ می‌رسیم. دستگاهی که بتوان، در مورد آن، عمل‌های جمع، تفریق و ضرب را، بدون عمل تقسیم، انجام داد، حلقه نامیده می‌شود. به سختی می‌توان روشن کرد که، چرا، برای این منظور، از چنین نام‌گذاری خاصی استفاده کرده‌اند. از خواست‌هایی که قبلاً ردیف کرده‌ایم، حلقه باید با شرط‌های ۱ تا ۶ و همچنین شرط‌های ۸ و ۱۱ سازگار باشد. دستگاه ماتریس‌های 2×2 ، يك حلقه را تشکیل می‌دهد دستگاه همه چندجمله‌ای‌های نسبت به x هم، يك حلقه است. مثلاً، دو چندجمله‌ای $x+3$ و x^2+1 را در نظر می‌گیریم. می‌توانیم آن‌ها را با هم جمع، از هم تفریق و در هم ضرب کنیم، ولی نمی‌توانیم آن‌ها را بر هم تقسیم کنیم، زیرا

تقسیم ما را به کسر $\frac{x+3}{x^2+1}$ می‌رساند که نمی‌توان آن را به صورت چندجمله‌ای

درآورد. بنابراین، چندجمله‌ای‌ها، يك حلقه را تشکیل می‌دهند و نه يك میدان را. به همین دلیل، عددهای درست هم، نه يك میدان، بلکه يك حلقه را تشکیل می‌دهند. دستگاه همه تابع‌های پیوسته هم تشکیل يك حلقه می‌دهند و، البته، نه يك میدان. اگر $y=f(x)$ و $y=\varphi(x)$ را دو تابع پیوسته بگیریم، آن وقت، نمودار مجموع، تفاضل و حاصل ضرب آن‌ها، یعنی $y=f(x)+\varphi(x)$ ، $y=f(x)-\varphi(x)$ و $y=f(x)\varphi(x)$ ، پیوسته

است، درحالی که درباره نمودار خارج قسمت این دوتابع، یعنی $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، نمی توان چیزی گفت. مثلاً، دوتابع $y = x$ و $y = 2x - 1$ ، تابع هایی پیوسته هستند، درحالی که خارج دوتابع، یعنی $y = \frac{x}{2x-1}$ ، در نقطه $x = \frac{1}{2}$ ناپیوسته است.

باید یادآوری کرد که، به این شرطها باید از جهت مثبت نگاه کرد نه از جهت منفی؛ یعنی اگر، علاوه بر شرطهای اصلی، با شرطهای اضافی دیگری هم سازگار باشد، موجب سلب صلاحیت از آن نمی شود. مثلاً، هرمیدان، درعین حال، یک حلقه هم به شمار می رود. این مطلب به این علت درست است که، در نظریه حلقه ها، به اثبات قضیه هایی می پردازیم که برای هر دستگاهی که با شرطهای ۱ تا ۶ و ۸ و ۱۱ سازگار باشد، درست اند؛ و این ها، شرطهایی هستند که برای میدان هم وجود دارند. طبیعی است که این قضیه ها، برای دستگاههایی هم که، علاوه بر این شرطها، با شرطهای اضافی دیگری هم سازگار باشند، درست خواهند بود. مثلاً، در هر حلقه، می توان ثابت کرد که $x^2 - x^6 = (x^3 + x)(x^3 - x)$. این نتیجه گیری، برای هر میدان، و مثلاً میدان عددهای حقیقی هم، درست است. این وضع، مارا به یاد هندسه می اندازد، که در آن، هر قضیه هندسه آفینی، برای هندسه اقلیدسی هم درست است (والبته، نه برعکس).

اغلب، به دنبال واژه «حلقه»، اضافه ای هم می آورند. مثلاً، عددهای زوج، یک حلقه جابجایی تشکیل می دهند، زیرا علاوه بر شرطهایی که برای حلقه لازم است، با شرط ۷ هم سازگارند. ماتریس های 2×2 ، تشکیل حلقه جابه جایی نمی دهند، ولی شامل ماتریس واحد I هستند و با شرط ۹ سازگارند، بنابراین، حلقه ای با عضو واحد تشکیل می دهند. در حالی که، عددهای زوج را، نمی توان با این نام ذکر کرد.

هر قدر که بخواهیم، می توانیم درباره این طبقه بندی ها تمرین کنیم و ببینیم که دستگاه مفروض، در چه موضعی قرار دارد. مثلاً، می توانیم

ماتریس‌های 2×2 به صورت $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ را در نظر بگیریم، که در آن‌ها، a, b, c, d ، عددهایی زوج‌اند. این حلقه هم، ویژگی‌های فوق را ندارد؛ این حلقه، از قانون جابه‌جایی پیروی نمی‌کند و عضو واحد هم ندارد.

محاسبه با حلقه‌ها

آنچه در مورد حلقه‌ها نتیجه گرفتیم، به‌طور طبیعی، شباهت زیادی با نتیجه‌های حاصل از جبر مقدماتی دارند. مثلاً در جبر مقدماتی، با اتحادهایی از نوع

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4;$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

و تعمیم آن‌ها به‌صورت قضیه دوجمله‌ای برای $(1+x)^n$ و $(x+y)^n$ برخورد می‌کنیم. نظریه حلقه‌ها هم، ما را به‌همین نتیجه‌ها، منتهی باکلیت بیشتری، می‌رساند.

در جبر مقدماتی، قضیه دوجمله‌ای، به‌معنای درستی دستور معینی برای عددهای دلخواه x و y است. در نظریه حلقه‌ها، همین قضیه، درستی این دستور را برای هر دستگاهی که پاسخ‌گوی شرط‌های معینی باشد، ثابت می‌کند.

مثلاً، چون در عبارت $(1+x)^n$ ، عدد ۱ شرکت دارد، دستگاه باید شامل عضو واحد باشد. اگر x و y قابل تبدیل به‌هم نباشند، آن‌وقت $(x+y)^2$ را می‌توان به‌صورت $x^2 + x^2 + y^2 + y^2$ نوشت و نه $x^2 + 2xy + y^2$ (تمرین ۹ در آخر فصل سوم را ببینید). بنابراین، باید دستگاه ما با قانون جابه‌جایی سازگار باشد. اکنون می‌توان قضیه دوجمله‌ای را، به‌صورت کاملاً عمومی‌تری، تنظیم کرد: دستورهای معمولی $(1+x)^n$ و $(x+y)^n$ ، در مورد هر حلقه‌ای که از قانون جابه‌جایی پیروی کند و، ضمناً، عضو واحد داشته باشد، درست است (در واقع، دستور اول برای حلقه‌هایی هم که از قانون جابه‌جایی پیروی نمی‌کنند، و دستور دوم، برای حلقه‌هایی هم که عضو واحد ندارند، برقرار است).

اثبات قضیه دوجمله‌ای، در این مفهوم وسیع، دقیقاً تکرار اثبات آن در جبر مقدماتی است. اختلاف تنها در این است که، در این جا، باید محاسبه را به گام‌های کوچکی تقسیم کرد، به نحوی که در هر کدام از آن‌ها، با تکیه بر شرطهایی که در مورد عددها وجود دارد، شرطهای موجود در دستگاه، قابل پذیرش باشد. ضمناً، در این اثبات، از نتیجه‌گیری‌های دیگر جبر سنتی هم استفاده می‌کنیم. وقتی که بخواهیم ثابت کنیم که، مثلاً جمله x^3y^{n-3} ، چندبار در بسط کامل دوجمله‌ای $(x+y)^n$ تکرار شده است، می‌توانیم به نتیجه‌های حاصل از جبر سنتی مراجعه کنیم.

تفصیل اثبات، به اندازه خود نتیجه‌گیری جالب نیست: نتیجه حاصل امکان می‌دهد تا از قضیه دوجمله‌ای، برای هر موضوعی که عدد هم نیستند، استفاده کنیم.

کاربرد

در آمار، و هم در سایر بررسی‌های علمی، اغلب به‌چنین مسأله‌ای برمی‌خوریم: دستور ساده مناسبی، برای مجموعه‌ای از داده‌ها، پیدا کنید. فرض کنید، برای تابعی، این آگاهی‌ها را در اختیار داشته باشیم:

$$f(0)=0, \quad f(1)=2, \quad f(2)=10, \quad f(3)=30, \quad f(4)=68, \\ f(5)=130, \quad f(6)=222$$

فرض می‌کنیم که، یک چندجمله‌ای ساده‌ای، می‌تواند با این داده‌ها سازگار باشد. آیا همین‌طور است؟ اگر پاسخ مثبت است، دستور آن چیست؟

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	
$f(n)$	۰	۲	۱۰	۳۰	۶۸	۱۳۰	۲۲۲
$\Delta f(n)$	۲	۸	۲۰	۳۸	۶۲	۹۲	
$\Delta^2 f(n)$	۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰		
$\Delta^3 f(n)$	۶	۶	۶	۶			
$\Delta^4 f(n)$	۰	۰	۰				

تنظیم جدول تفاضل‌های مقدارهای مفروض می‌تواند مفید باشد. عددهای هر سطر، معرف گام‌هایی هستند که سطر قبلی به سمت افزایش برداشته است. وجود صفرها در سطر مقابل $\Delta^2 f(n)$ ، نشانه‌ای است از این که، در این جا، باید دستوری وجود داشته باشد. ولی، چطور باید آن را پیدا کرد؟ در کتاب‌های درسی آمار، راه حل زیر پیشنهاد می‌شود. ابتدا عمل E را طوری پیدا می‌کنیم که بتواند $f(n)$ را به $f(n+1)$ تبدیل کند، یعنی $Ef(n) = f(n+1)$ در حالت خاص:

$$Ef(2) = f(3), Ef(1) = f(2), Ef(0) = f(1)$$

از این جا، معلوم می‌شود که، با تکرار سه بار عمل E ، می‌توان $f(0)$ را به $f(3)$ تبدیل کرد. این نتیجه را، به طور نمادی، به صورت $E^3 f(0) = f(3)$ و، در حالت کلی، به صورت $E^n f(0) = f(n)$ می‌نویسند. اگر بتوانیم دستوری برای $E^n f(0)$ پیدا کنیم، مسأله را حل کرده‌ایم.

درباره Δ چه می‌توانیم بگوییم؟ در جدول، عددی و مثلاً ۳۸ را، در نظر می‌گیریم، که برابر است با $\Delta f(3)$. این عدد به عنوان تفاضل دو عدد سطر بالا، یعنی ۶۸-۳۰ یا $f(4) - f(3)$ به دست آمده است. چون $f(4) = Ef(3)$ ، بنابراین، ۳۸ عبارت است از $Ef(3) - f(3)$ ، یا $(E-1)f(3)$. به این ترتیب، داریم:

$$\Delta f(3) = (E-1)f(3)$$

و این، به ذهن ما می‌رساند که، عمل Δ ، همان عمل $(E-1)$ است. از کجا به این فکر می‌رسیم؟ عدد ۳۸ را، در سطر $\Delta f(n)$ به دلخواه انتخاب کردیم و، بنابراین، نتیجه حاصل را درباره هر عدد دیگری از این سطر هم می‌توان به دست آورد. از این جا، معلوم می‌شود که، حدس ما، در این باره که Δ و $E-1$ معرف یک عمل‌اند، درست است، یعنی $\Delta = E-1$ یا $E = 1 + \Delta$. اکنون، از قضیه دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(n) &= E^n f(0) = (1 + \Delta)^n f(0) = \\ &= \left\{ 1 + n\Delta + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} \Delta^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} \Delta^3 + \dots \} f(0) = \\
& = f(0) + n \Delta f(0) + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} \Delta^2 f(0) + \\
& + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} \Delta^3 f(0) + \dots
\end{aligned}$$

از این جهت، در نوشتن دستور، به چهار جمله اول اکتفا کردیم که، در مسأله ما، $\Delta^4 f(0)$ و همه جمله‌های بعد از آن، برابر صفرند. اکنون، با توجه به ستون اول جدول، خواهیم داشت:

$$f(0) = 0, \quad \Delta f(0) = 2, \quad \Delta^2 f(0) = 6, \quad \Delta^3 f(0) = 6$$

و در نتیجه، به دست می‌آید:

$$f(n) = 0 + 2n + 3n(n-1) + n(n-1)(n-2)$$

که بعد از ساده کردن، دستور لازم را به دست می‌آوریم:

$$f(n) = n^3 + n$$

به یاد می‌آورم که، با این روش، در دوره جوانی و وقتی که خود را برای امتحان آماده می‌کردم، آشنا شدم. در آن زمان، قضیه دو جمله‌ای را تنها برای موردهای عددی یاد گرفته بودم، و از این روش، به خاطر زیرکی فوق العاده‌ای که در آن دیده می‌شد و به خاطر فکر جسورانه‌ای که به آدم اجازه می‌داد تا از رابطه‌های صوری ریاضیات آزادانه استفاده کند و، ضمناً، به نتیجه‌ای درست برسد، دچار شگفتی شدم. ولی در واقع، این روش کاملاً دقیق است و از لحاظ منطقی، هیچ ایرادی ندارد. بعد از آن که عمل گر E پیدا شد، می‌توان جلوتر رفت و هر چند جمله‌ای از E ، و مثلاً $E^2 + 2E + 3$ را به دست آورد. منظور از $(E^2 + 2E + 3)f(n)$ عبارت است از $f(n+2) + 2f(n+1) + 3f(n)$ که چیزی جز $E^2 f(n) + 2E f(n) + 3f(n)$ نیست. مجموع دو چند جمله‌ای از این گونه، به سادگی به دست می‌آید. ضرب، همچون اجرای متوالی عمل E ، انجام می‌شود. مثلاً، منظور از ضرب $(E+2)(E+3)$ این است که ابتدا عمل $E+3$ را روی موضوع اولیه انجام دهیم و، سپس، عمل $E+2$ را روی نتیجه اول اجرا کنیم. بالاخره،

برای این مفهوم این نماد را روشن تر کنیم، می توانیم به این نکته اشاره کنیم که چند جمله ای های نسبت به E ، در واقع، یک حلقه جابه جایی با جمله واحد، را تشکیل می دهند. و وقتی که به این مطلب قانع شدیم (که اثبات آن، مشکل نیست ولی خسته کننده است)، آن وقت به خوبی روشن می شود که چرا قضیه دو جمله ای را در باره دستگاه خود به کار برده ایم. چون $\Delta = E - 1$ ، بنابراین عمل Δ متعلق به دستگاه است و استفاده از دستور دو جمله ای درباره $(\Delta + 1)^n$ ، از لحاظ منطقی، مجاز است.

از شبیه همین اندیشه، در یکی از روش های حل معادله های دیفرانسیلی استفاده می شود. اگر عمل مشتق گیری را با حرف D نشان دهیم، آن وقت $Df(x)$ به معنای $f'(x)$ است. بنابراین، عبارت $(D^2 + 2D + 3)f(x)$ به معنای $f''(x) + 2f'(x) + 3f(x)$ است؛ در این جا هم، ضرب، به عنوان به کار بردن متوالی عمل، تعریف می شود. می توان روشن کرد که چند جمله ای های نسبت به D ، حلقه ای را تشکیل می دهند که از قانون جابه جایی پیروی می کند و، ضمناً، دارای جمله واحد است. بنابراین، در دستگاه می توان، با اطمینان کامل، از همه دستورهای مقدماتی که شامل عمل های جمع، تفریق و ضرب باشند، استفاده کرد. بعضی از کتاب های درسی، در رابطه با این روش، ملاحظه کاری بی مورد دارند و تأکید می کنند که: «روش D ، روشی است که تنها جواب معادله دیفرانسیلی را به دست می آورد، ولی نتیجه ای که از این راه به دست می آید، باید حتماً مورد آزمایش قرار گیرد». ولی، جوابی که با این روش به دست می آید، همیشه در آزمایش سربلند می شود. ولی، اگر با عمل هایی از نوع $D + x$ سروکار داشته باشیم، که در آن، $(D + x)f(x)$ به معنای $f'(x) + xf(x)$ است، آن وقت، وضع فرق می کند. این مطلب را روی مثالی، مثل عمل $(D - x)(D + x)$ بررسی می کنیم. وقتی که می نویسیم: $(D - x)(D + x)f(x)$ ، به معنای این است که عمل $D + x$ و $D - x$ را، پشت سرهم درباره تابع $f(x)$ انجام دهیم و می توان آن را به صورت $(D - x)u(x)$ نوشت، که در آن، $u(x) = (D + x)f(x)$. در این جا اشتباه است اگر گمان کنیم:

پس $(D-x)(D+x) = D^2 - x^2$. در واقع، چون $u(x) = f'(x) + xf(x)$

$$Du(x) = u'(x) = f''(x) + xf'(x) + f(x)$$

و سپس

$$(D-x)u(x) = u'(x) - xu(x) = f''(x) - x^2f(x) + f(x) = (D^2 - x^2 + 1)f(x)$$

یعنی به دست آوردیم: $(D-x)(D+x) = D^2 - x^2 + 1$ ، نتیجه‌ای که برای جبر مقدماتی، غیرعادی است. این وضع، از این جا ناشی شده است که، با دستگاهی غیر جابه‌جایی سروکار داریم، که در آن، Dx و $x D$ برابر نیستند. $x D$ یعنی: «مشتق بگیر و، سپس، در x ضرب کن»، یعنی $x D f(x)$ به معنای $x f'(x)$ است؛ ولی Dx یعنی: «ابتدای x ضرب کن و، سپس، از حاصل آن مشتق بگیر». به این ترتیب (طبق قانون مشتق‌گیری از حاصل ضرب):

$$Dx f(x) = [x f(x)]' = x f'(x) + f(x)$$

نتیجه‌آخر را می‌توان به صورت $(xD + 1)f(x)$ نوشت، یعنی $Dx - xD = 1$. با توجه به این مطلب، می‌توانیم $D-x$ و $D+x$ را، به صورت جبری، و به ترتیب زیر، درهم ضرب کنیم:

$$\begin{aligned} (D-x)(D+x) &= D(D+x) - x(D+x), \quad (\text{بنابر ۱۱-}b) \\ &= D^2 + Dx - xD - x^2, \quad (\text{بنابر ۱۱-}a) \\ &= D^2 + 1 - x^2 \quad (Dx - xD = 1 \text{ زیرا}) \end{aligned}$$

خوب است که به این نوع محاسبه عادت کنیم، یعنی در ضرب، ردیف عامل‌ها را رعایت کنیم، زیرا قانون جابه‌جایی در ضرب (ویژگی ۷: $ab = ba$)، یکی از ویژگی‌هایی است که، بدون آن، نمی‌توان ردیف عامل‌ها را عوض کرد: مثلاً دستگاهی که از همهٔ ماتریس‌های 2×2 تشکیل شده است، حلقه‌ای است با عضو واحد که از قانون جابه‌جایی پیروی نمی‌کند.

یکی از اساسی‌ترین ویژگی‌های نظریهٔ کوانتومی این است که، در آن، ضرب غیر جابه‌جایی است. یادآوری این نکته جالب است که نظریه کوانتومی

را می‌توان هم با اصطلاح‌های ماتریسی بیان کرد - کاری که هاینبرگ در نوشته‌های خود (۱۹۲۵) انجام داد - و هم با اصطلاح‌های مشتق‌گیری - کاری که شرودینگر در سال ۱۹۲۶ انجام داد.

تمرین

۱. حاصل ضرب $(D+x)(D-x)$ را پیدا کنید. آیا با حاصل ضرب $(D-x)(D+x)$ یکی است؟

۲. عبارت $(D+x)^2 - (D^2 + 2xD + x^2)$ را ساده کنید.

۳. فرض کنید: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

X^2 و X^3 را محاسبه کنید. $(I-X)^2$ را محاسبه کنید: a به طور مستقیم و با ضرب ماتریس‌ها، b به کمک دستور معلوم مربع مجموع. آیا دو نتیجه، برهم منطبق‌اند؟ آیا می‌توان، قبل از محاسبه، پاسخ را پیش‌بینی کرد؟ $(I+X)^{10}$ را پیدا کنید.

۴. اگر A و B متعلق به حلقه‌ای غیر جابه‌جایی باشند، بعد از ضرب کامل $(A+B)^2$ و $(A+B)^3$ ، به طور جداگانه، چه حاصل می‌شود؟
۵. «دستگاه رقم‌های پس‌مانده» را، به این ترتیب، تعریف می‌کنیم. تنها از نمادهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ استفاده می‌شود. تعریف جمع و ضرب، کاملاً شبیه حساب معمولی است. تنها اختلاف آن با حساب معمولی در این است که در این جا، فقط رقم آخر را به عنوان نتیجه می‌نویسیم. مثلاً $9+3=2$ ، زیرا عدد ۱۲ به رقم ۲ ختم می‌شود؛ $7 \times 4=8$ ، زیرا ۲۸ به رقم ۸ ختم می‌شود. چه شرط‌هایی با این دستگاه سازگار است؟ به چه نوع دستگاهی تعلق دارد؟ آیا قضیه دوجمله‌ای، در این دستگاه، درست است؟

۶. «دستگاه رقم‌های پس‌مانده زوج»، شبیه «دستگاه رقم‌های پس‌مانده»
تمرین ۵ تشکیل می‌شود، با این تفاوت که، در این جا، تنها رقم‌های زوج ۰، ۲، ۴، ۶ و ۸ مورد استفاده است. به همان پرسش‌های تمرین ۵، پاسخ دهید.
۷. شبیه تمرین ۵، «دستگاه رقم‌های پس‌مانده فرد» را، که در آن،

تنها از رقم‌های فرد ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ استفاده می‌شود، بررسی کنید.

فضاهای برداری

در بالا، تصویری کاملاً کلی، درباره فضاهای برداری به دست دادیم. اکنون می‌خواهیم درباره شرط‌هایی صحبت کنیم، که یک فضای برداری را معین می‌کنند.

در مسأله‌هایی که قبلاً روی صفحه بررسی کردیم، از عبارتهایی به صورت $K + 2P$ ، $K + 4P$ و غیره استفاده کردیم که شامل نقطه‌ها یا بردارها بودند و با حرف‌های بزرگ K و P و عددها، نشان داده می‌شدند، اگر برای نام‌گذاری عددها، از حرف‌های کوچک استفاده کنیم، آن وقت، عبارتهای مورد بررسی، به صورت کلی $xK + yP$ درمی‌آیند.

شرط‌هایی را، که معرف یک فضای برداری هستند، می‌توان به دو بخش تقسیم کرد. در بخش اول، عددها هیچ چیزی را به خاطر نمی‌آورند، در این جا، تنها و منحصرأً با جمع بردارها سروکار داریم. در بخش دوم، ضرب بردار در عدد را بررسی می‌کنیم.

بخش اول ساده و کوتاه است و از ۵ شرط تشکیل شده است:

۱. برای بردارهای دلخواه P و Q ، بردار مجموع $P + Q$ تعریف می‌شود.

۲. جمع از قانون جابه‌جایی پیروی می‌کند: $P + Q = Q + P$.

۳. جمع از قانون شرکت‌پذیری پیروی می‌کند:

$$P + (Q + K) = (P + Q) + K$$

۴. بردار صفر O وجود دارد، به نحوی که برای هر بردار P داریم:

$$P + O = P$$

۵. در دستگاه، تفریق تعریف شده است؛ برای هر دو بردار دلخواه P و Q ،

تنها یک بردار X پیدامی‌شود، به نحوی که داشته باشیم: $P + X = Q$.

فرض می‌کنیم، این ویژگی‌ها، برای دستگاه‌هایی که قبلاً بررسی کردیم برقرار باشند، اعم از این که بردار را به عنوان نقطه‌ای از صفحه در نظر بگیریم که عمل جمع، در مورد آن، با قاعده متوازی‌الاضلاع انجام می‌گیرد، یا این که به عنوان « x گریه و y سگ» تعبیر شود.

ضمناً، این شرطها، دقیقاً متناظر با شرطهای ۱ تا ۵ در مورد دستگاه بردارهای مربوط به گروه جابه جایی هستند که در بخش «طبقدبندی دستگاههای ریاضی» آورده بودیم.

بخش دوم شرطها مربوط به موردی است که، در محاسبه های خود، هم با بردارها سروکار داریم و هم با عددها. از جمع $2P$ و $3P$ به دست می آید $5P$ ، یعنی، به طور ساده، عددها را باهم جمع می کنیم. از نظر جبری می توان این عمل را با برابری $aP + bP = (a+b)P$ بیان کرد. سپس، ۵ مرتبه $(P+Q)$ می دهد $5P + 5Q$ ، یعنی، در حالت کلی داریم $a(P+Q) = aP + aQ$. ۳ مرتبه $2P$ می دهد $6P$ ، یعنی کار منجر به ضرب عددها می شود و در حالت کلی، می توان نوشت: $a(bP) = (ab)P$. در بعضی موردها، راحت تر است که P را به صورت P . ۱ در نظر بگیریم. روشن است که همه این مفهوما، وقتی معنا دارند که، از همان ابتدا عمل ضرب بردار در عدد را وارد کرده باشیم.

اکنون، شرطهای بخش دوم را، می توان به این ترتیب، تنظیم کرد:

۶. برای هر بردار P و هر عدد a ، بردار aP تعریف شده است.

$$7. aP + bP = (a+b)P$$

$$8. a(P+Q) = aP + aQ$$

$$9. a(bP) = (ab)P$$

$$10. P = P$$

اگر دستگاهی با همه این ده شرط سازگار باشد، به معنای آن است که این دستگاه، یک فضای برداری است، و گامهای لازم برای انجام عمل روی بردارهای این دستگاه، کاملاً مشخص است. بنابراین، برای هر دستگاهی که با این ده شرط سازگار باشد، می توان طرحی برای روش کار و نتیجه گیری را ریخت.

در انتهای فصل دوم دیدیم که دستگاههایی همچون سه جمله ای های درجه دوم، عبارت های به صورت $a \sin x + b \cos x$ و تابع های پیوسته را، باید جزو فضای برداری به حساب آورد. اکنون در موقعیتی هستیم که می توانیم این ادعا را ثابت کنیم. برای این منظور، کافی است تحقیق کنیم که، هر یک

از دستگاه‌های مزبور، دارای هرده ویژگی فوق هستند. انجام این تحقیق، دشوار نیست. فرض کنیم، با سه جمله‌ای‌های درجه دوم سروکار داریم. اگر دوسه جمله‌ای درجه دوم را باهم جمع کنیم، يك سه جمله‌ای درجه دوم به دست می‌آید، بنابراین، شرط ۱ برقرار است. اگر سه جمله‌ای درجه دوم $px^2 + qx + r$ را P بنامیم، آن وقت aP معین است و در شرط ۶ صدق می‌کند. تحقیق بقیه شرط‌ها، منجر به استفاده از اتحادهای ساده‌ای در جبر مقدماتی می‌شوند.

به همین ترتیب، می‌توان دستگاه شامل عبارت‌های به صورت $asin x + bcos x$ را هم مورد بررسی قرار دارد.

اثبات این حکم را، که تابع‌های پیوسته، يك فضای برداری را تشکیل می‌دهند، از تحقیق شرط اول آغاز می‌کنیم: اگر $f(x)$ و $g(x)$ ، تابع‌هایی پیوسته باشند، مجموع‌ها، $f(x) + g(x)$ هم تابعی پیوسته خواهد بود. این نتیجه‌گیری کاملاً معقول به نظر می‌رسد و اثبات صوری آن هم، تمرین ساده‌ای در آنالیز ریاضی است. اگر واژه «بردار» را، به عنوان مقدار «تابع پیوسته» تفسیر کنیم، آن وقت، مجموع دو بردار، باز هم برداری است که خود، يك تابع پیوسته است. بنابراین، شرط ۱، برقرار است. شرط ۶ می‌گوید که: اگر بردار (تابع پیوسته) را در عدد a ضرب کنیم، باز هم يك بردار (یعنی، يك تابع پیوسته) به دست می‌آید. روشن است که، اگر $f(x)$ پیوسته باشد، $a \cdot f(x)$ هم پیوسته خواهد بود. اکنون، اگر بردار P را به عنوان $f(x)$ بگیریم، آن وقت بردار aP ، معرف $a f(x)$ می‌شود، که با شرط ۶ سازگار است. از همین جا می‌توان شرط‌های دیگر را هم دنبال کرد. صفر، که در شرط ۴ از آن صحبت شده است، عبارت است از تابعی که نمودار آن، بر محور Ox منطبق باشد، یعنی $y = 0$ برای همه مقادیر x . برای تابع‌های پیوسته، اهمیت ندارد که پیوستگی آن‌ها برای مجموعه همه عددهای حقیقی x وجود داشته باشد یا تنها برای فاصله‌ای، و مثلاً فاصله بین ۰ و ۱. در هر دو حالت، با يك فضای برداری سروکار خواهیم داشت. دستگاهی هم که از همه چند جمله‌ای‌ها تشکیل شده باشد، يك فضای برداری است. مجموع دو چند جمله‌ای، همیشه يك چند جمله‌ای است،

بنابراین، شرط ۱ برقرار است. از ضرب يك چند جمله‌ای در عدد a ، همیشه چند يك چند جمله‌ای به دست می‌آید. بقیه ویژگی‌ها هم، به همین اندازه، واضح است. ولی اثبات صوری مطلب، هم از نظر خصلت زبانی و هم از نظر خصلت ریاضی خود، دشواری‌هایی دارد. اندیشه کلی روشن است، ولی بیان آن، همیشه ساده نیست.

رشته‌نمایی، برای تابع x ، برای همه مقدارهای x - حقیقی یا مختلط - ویژگی‌های مشابهی دارد. رشته‌هایی باین ویژگی را، تابع‌های تام یا تابع‌های کامل گویند. این رشته‌ها، یا تابع‌های معرف آن‌ها، يك فضای برداری را تشکیل می‌دهند.

تابع‌های پیوسته $f(x)$ - که هم اکنون درباره آن‌ها بحث کردیم - تابع‌هایی باین متغیر بودند. بنابراین، از فضای يك بعدی آغاز کردیم. ولی، يك بعدی بودن، هیچ گونه امتیاز خاصی ندارد. فرض کنید، تابع $V = f(x, y)$ ، معرف پتانسیل الکتریکی را در نقطه (x, y) از قطعه صفحه مسی، و $V = g(x, y)$ معرف همان پتانسیل الکتریکی، منتهی در موقعیت‌های دیگری، باشد. در این صورت، تابع $V = f(x, y) + g(x, y)$ هم، پتانسیل را معین می‌کند. اگر $f(x, y)$ و $g(x, y)$ جواب‌های معادله لاپلاس باشند، $f(x, y) + g(x, y)$ و هم $af(x, y)$ - به ازای هر a - جواب‌هایی از معادله لاپلاس خواهند بود. به این ترتیب، توانستیم، عمل‌های جمع و ضرب در عدد a را، برای پتانسیل‌ها تعریف کنیم، یعنی به شرط‌های ۱ و ۶، پاسخ مثبت بدهیم. به همین ترتیب، می‌توان سایر ویژگی‌ها را هم مورد تحقیق قرارداد؛ یعنی، همه پتانسیل‌های الکتریکی ممکن در صفحه تیغه مسی (به شرطی که باتری‌ها را تنها به مرزها وصل کرده باشیم)، تشکیل يك فضای برداری می‌دهند.

می‌توانیم، فضای برداری دیگری، شبیه فضای همه تابع‌های پیوسته $f(x)$ به دست آوریم. برای این منظور، $f(x, y)$ را، نه به عنوان پتانسیل، بلکه به عنوان تابع پیوسته دلخواهی می‌گیریم، که برای همه نقطه‌های بخشی از صفحه، معین باشد.

بنابراین، فضاهای برداری، هیچ چیز تازه‌ای را معرفی نمی‌کنند. هر کسی

که چند جمله‌ای‌ها یارشته‌های متقارب را باهم جمع می‌کند و یا به بررسی پتانسیل‌های الکتریکی مشغول است، بایک فضای برداری سروکار دارد. آنچه تازگی دارد، روشی است که، به کمک آن، نتیجه آزمایش‌های خود را، طبقه‌بندی می‌کنیم.



در باره خطی بودن

در فصل سوم، نگاشت‌های مختلفی را مورد بررسی قرار دادیم که به صورت ماتریسی بیان شده بود، در برخی از موردها، بانگاشت يك فضا بر فضای دیگر (پول $\rightarrow$ نفت) و در بعضی دیگر، با نگاشت يك فضا بر خودش، سروکار داشتیم. ولی، همه نگاشت‌ها خطی بودند، یعنی (همان‌طور که در بخش «جست و جوی شرط‌های لازم» در فصل پنجم نشان دادیم)، ویژگی‌های معینی داشتند: اگر $P \rightarrow P^*$ و $Q \rightarrow Q^*$ ، آن وقت $P+Q \rightarrow P^*+Q^*$ و $kP \rightarrow kP^*$ (برای هر k). تعریف نگاشت خطی بر این مبناست که به عبارت‌های $P+Q$ و kP ، مفهوم معینی داده می‌شود. مثلاً، اگر P و Q در يك فضای برداری و P^* و Q^* در فضای برداری دیگری (یا همان فضا) باشند، آن وقت، عبارت‌های $P+Q$ ، kP ، P^*+Q^* و kP^* مفهوم کاملاً معینی دارند. بنابراین، می‌توانیم از نگاشت يك فضای خطی بر فضای خطی دیگر (یا بر خودش) صحبت کنیم، نمونه‌های ساده‌ای از این گونه نگاشت‌ها را در آغاز فصل سوم دیده‌ایم: نگاشت يك فضای دوبعدی بر فضای سه‌بعدی و غیره... ولی، فصل هفتم، که به گوناگونی فضاهای برداری پرداخته بود، برای ما روشن می‌کند که، دایره کاربرد نگاشت خطی، گسترده‌تر از این‌هاست و شامل مشتق‌گیری، انتگرال‌گیری، عمل‌گرهای Δ و E فصل هفتم، عمل‌های فیزیک ریاضی و خیلی چیزهای دیگر می‌شود.

چند نمونه دیگر از نگاشت خطی می‌آوریم. تابع‌های $f(x)$ ، که برای $1 \leq x \leq 0$ پیوسته باشند، يك فضای برداری را تشکیل می‌دهند. برای هر تابعی از این گونه، مساحت زیر نمودار $y = f(x)$ ، با انتگرال معین $\int_0^1 f(x) dx$

به دست می‌آید. شما تابع $f(x)$ را برای من نام ببرید، تا من، عدد A را که معرف مساحت زیر نمودار این تابع است، به شما بدهم. به زبان دیگر، در این جا، با نگاشت $A \rightarrow f(x)$ سر و کار داریم. موضوع نخستین یا ورودی، يك تابع پیوسته، و خروجی یا نتیجه، يك عدد است. دستورهای اصلی آنالیز ریاضی، ثابت می‌کنند که این، نگاشتی خطی است (با پاورقی بخش «جستجوی معادله»). از فصل پنجم مقایسه کنید که، در آن، ثابت کردیم که مشتق‌گیری يك نگاشت خطی است). به این ترتیب، این انتگرال معین، نگاشت خطی تابع‌های پیوسته را به فضای عددهای حقیقی، تحقق می‌بخشد.

به جای مساحت زیر نمودار در فاصله از ۰ تا ۱، می‌توانستیم، مساحت را در فاصله از ۰ تا x مورد بررسی قرار دهیم. در این جا، دیگر بایک عدد به عنوان نتیجه سروکار نداریم، بلکه، این نتیجه بستگی به x دارد، یعنی تابعی است از x . مثلاً، در حالت نمودار تابع $y = x^2$ ، دستور مساحت در فاصله ۰ تا x ، عبارت است از $A(x) = \frac{1}{3}x^3$. در این جا، بایک نگاشت خطی سروکار

داریم، خطی بودن آن را، اصطلاح‌هایی از نوع «انتگرال مجموع»، برابر است با مجموع انتگرال‌ها»، تضمین می‌کند، نگاشت « $f(x) \rightarrow A(x)$ » عبارت است از نگاشت «تابع پیوسته $\rightarrow$ تابع پیوسته». یعنی این، عبارت است از نگاشت فضای برداری تابع‌های پیوسته بر خودش. غل انتگرال‌گیری را می‌توان تکرار کرد: می‌توانیم مربع، مکعب و دیگر توان‌های عمل را بررسی کنیم؛ می‌توان آن‌ها را، به صورت چند جمله‌ای و شبیه فصل سوم، باهم ترکیب کرد. ضمناً هیچ ضرورتی ندارد که تابع‌های پیوسته، متناظر با دستورهای ساده‌ای شبیه $\frac{1}{3}x^3 \rightarrow x^2$ باشند. تابع اولیه می‌تواند از طریق

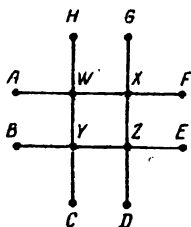
آزمایش، و مثلاً ثبت فشار هوا سنج، به دست آمده باشد.

می‌دانیم که، همه تابع‌های پیوسته قابل مشتق‌گیری نیستند (اگر چه، دوسه طول کشید تا این حکم ثابت شد). بنابراین، عمل گر دیفرانسیل‌گیری $D = \frac{d}{dx}$ را نمی‌توان درباره همه تابع‌های پیوسته $f(x)$ به کار برد و، در

نتیجه، نگاشت فضای برداری تابع‌های پیوسته، تحقق نمی‌پذیرد. در نظریه معادله‌های دیفرانسیلی، اغلب به تابع‌هایی از نوع xe^{-x} ، $\cos x$ ، $\sin x$ ، e^x برمی‌خوریم که به طبقه تابع‌های تام (که در فصل هفتم تعریف شدند) تعلق دارند. تابع تام، همیشه قابل مشتق‌گیری است که، در نتیجه، دوباره یک تابع تام به دست می‌آید. در این حالت $f'(x): D \rightarrow f(x)$ ، فضای تابع‌های تام را بر خودش می‌نگارد. و همان‌طور که می‌دانیم، این، یک تبدیل خطی است. علاوه بر آن، هر چند جمله‌ای، نسبت به عمل D ، خطی است، مثلاً اگر داشته باشیم: $v = u'' + u$ ، که در آن، $v = (D^2 + 1)u$ ، در آن صورت، نگاشت $u \rightarrow v$ ، خطی است.

نگاشت الکتریکی

شکل ۶۸، مربوط به مساله‌ای از الکتریسیته است که در بخش «شبکه‌های کشیده و حباب‌های صابون» از فصل ششم، مورد بررسی قرار داده بودیم. نقطه‌های بیرونی $A, B, C, \dots, H$ به باتری وصل شده‌اند، پتانسیل این نقطه‌ها، معلوم و، به ترتیب، برابر است با $a, b, c, \dots, h$. پتانسیل w, x, y, z نقطه‌های درونی W, X, Y, Z مجهول‌اند، ولی می‌توان



شکل ۶۸

آن‌ها را با توجه به این شرط به دست آورده‌که، پتانسیل هر نقطه برابر است با واسطه عددی پتانسیل‌های چهار نقطه مجاور. این شرط، چهار معادله با چهار مجهول می‌دهد، که با حل آن‌ها، عبارت مربوط به y به دست می‌آید:

$$y = \frac{2a + 2b + 2c + 2d + 2e + f + g + 2h}{24}$$

و همین‌طور، رابطه‌های مشابهی برای w و x و z . توجه کنیم که عبارت‌های

x, y, z ، نسبت به $a, b, c, d, \dots, h$ ، خطی هستند؛ بنابراین، با نگاشت خطی پتانسیل‌های نقطه‌های مرزی بر پتانسیل‌های حاصل نقطه‌های درونی، سروکار داریم. خطی بودن نگاشت، برای شبکه‌ای هم که تعداد زیادی نقطه‌های گرهی داشته باشد، حفظ می‌شود، تنها تعداد معادله‌ها در این حالت زیاد و خود معادله‌ها هم «درازتر» می‌شوند. حتی در حالتی هم که به سمت حد عبور کنیم و با یک تیغهٔ مسی سروکار داشته باشیم، باز هم خطی بودن نگاشت به قوت خود باقی می‌ماند.

نگاشت پنهانی

هر جایی که مقدارهای عددی را به دستورهای حرفی تبدیل می‌کنیم، با یک نگاشت خطی سروکار داریم. این نگاشت، از نوع «عدد $\rightarrow$ تابع» است. شما تابع را برای من نام ببرید، تا من مقدار آن را، که به ازای عدد ثابتی و مثلاً ۱۰ به دست آمده است، به شما بگویم. در این جا، نتیجهٔ قرار دادن عدد ۱۰، در عبارات مختلف، داده شده است:

مقدار عبارت به ازای $x=10$	عبارت
۱۰۰	x^2
۱۰۰۰	x^3
۱۱۰۰	$x^3 + x^2$
۵۰۰	$5x^2$

نگاشت ستون اول بر ستون دوم، خطی است. اگر $100 \rightarrow x^2$ و $1000 \rightarrow x^3$ ، آن وقت مجموع $x^3 + x^2$ به عنوان مجموع ۱۰۰ و ۱۰۰۰ به دست می‌آید. به همین ترتیب، وقتی که $100 \rightarrow x^2$ ، آن وقت $5x^2$ ، پنج برابر ۱۰۰ را می‌دهد؛ یعنی هر دو شرط خطی بودن، برقرار است.

در این حالت، برای نگاشت خطی، همیشه جدول تشکیل می‌دهیم. فرض کنید، مثلاً، جدول مقدارهای تابع‌های مختلف را، به ازای $x=2, x=3, x=4$ تشکیل داده باشیم. در این صورت، جدول x^2 ، مقدارهای ۴، ۹ و ۱۶ را می‌دهد. می‌نویسیم: $(4, 9, 16) \rightarrow x^2$. به همین ترتیب $(8, 27, 64) \rightarrow x^3$. بنابراین، نگاشتی داریم، که در آن، هر عبارت

موجد يك بردار سه بعدی می شود. به سادگی می توان قانع شد که، این نگاشت خطی است.

با وجود این، آیا در بیان نقش خطی بودن، مبالغه نمی کنیم؟ آیامی ارزد که خطی بودن در مورد این یا آن نگاشت را، ثابت کنیم؟ به نظر می رسد که می ارزد. مساله هایی که شامل تبدیل های خطی هستند، این امتیاز را دارند که اجازه می دهند از حل مساله های ساده تر برای حل مساله های کاملاً بغرنج تر استفاده کنیم.

این مساله را در نظر می گیریم: کدام سه جمله ای درجه دوم به صورت $px^2 + qx + r$ ، به ازای $x = 2$ برابر a ، به ازای $x = 3$ برابر b و به ازای $x = 5$ برابر c می شود؟

چگونه می توان، مساله ای از این نوع را ساده کرد؟ اگر $a = 1$ ، $b = 0$ و $c = 0$ بگیریم، مساله چنین می شود: کدام سه جمله ای درجه دوم، مقدارهای 1، 0 و 0 را، به ترتیب، به ازای مقدارهای 2، 3 و 5 برای x ، اختیار می کند؟ به این پرسش، ساده تر از حالت کلی می توان پاسخ داد. برای این که سه جمله ای درجه دوم، به ازای $x = 3$ و $x = 5$ برابر صفر شود، باید به صورت $k(x-3)(x-5)$ باشد، و برای این که به ازای $x = 2$ برابر 1 باشد، باید $k = \frac{1}{3}$ گرفت.

به همین ترتیب، حالت های $a = 0$ ، $b = 1$ ، $c = 0$ و $a = 0$ ، $b = 0$ ، $c = 1$ را در نظر می گیریم، به این سه نتیجه می رسیم:

$$\begin{aligned} \frac{(x-3)(x-5)}{3} &\rightarrow (1, 0, 0) \\ -\frac{(x-2)(x-5)}{2} &\rightarrow (0, 1, 0) \\ \frac{(x-2)(x-3)}{6} &\rightarrow (0, 0, 1) \end{aligned}$$

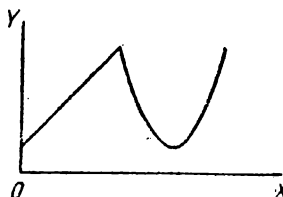
به مساله اصلی برمی گردیم. در جست و جوی سه جمله ای درجه دومی برای مقدارهای (a, b, c) هستیم و می بینیم که (a, b, c) می تواند به صورت ترکیبی از سه نتیجه حاصل نوشته شود:

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$$

ولی، دريك روند خطی، اگر بخواهیم نتیجه (خروجی) را در a ضرب کنیم، می‌توانیم داده‌های اولیه را در a ضرب کنیم؛ و اگر بخواهیم نتیجه‌ها را باهم جمع کنیم، می‌توانیم مجموع داده‌ها را پیدا کنیم. بنابراین، a مرتبه از سه جمله‌ای اول، b مرتبه از سه جمله‌ای دوم و c مرتبه از سه جمله‌ای درجه دوم سوم انتخاب می‌کنیم، مجموع آن‌ها، همان عبارت مجهول ماست. خطی بودن، در بسیاری از زمینه‌های فیزیک جادارد، مثلاً، در آن‌جا که پتانسیل دوبار الکتریکی را می‌توان با مجموع پتانسیل‌های این بارها پیدا کرد. در چنین موردی، اصطلاحاً می‌گویند که با انطباق سروکار داریم.

یادداشتی دربارهٔ تابع‌ها

آن چه را که هم اکنون نگاشت نامیدیم، گاهی تابع نامیده می‌شود. واژه «تابع» تاریخ درازی دارد که، در جریان آن، دست کم دوبار، معنای آن تغییر کرده است. از آن‌جا آغاز می‌کنیم که $y = f(x)$ ، به معنای بستگی بین y و x بود، که با دستور ساده‌ای داده می‌شد. به این مفهوم، نموداری که در شکل ۶۹ نشان داده‌ایم قسمتی از آن خط راست و قسمت دیگر آن سهمی است، نمی‌توانست معرف يك تابع باشد. به این نمودار، بیشتر به این خاطر متوسل



شکل ۶۹

می‌شدند که دو تابع مختلف را نشان دهند. در همین زمان، گمان می‌کردند که همهٔ رشته‌های نامتناهی ممکن، تابع‌هایی را تعریف می‌کنند. در جریان بحث‌های سخت و تندی که در طول سال‌های ۱۷۳۰ تا ۱۷۶۰ جریان داشت، معلوم شد که یکی از رشته‌ها، یعنی رشتهٔ فوریه که شامل سینوس‌ها و کسینوس‌ها است، تابعی است که نمودار آن شبیه شکل ۶۹ در می‌آید. در واقع،

رشته فوریه، مخلوط عجیب و غریبی از شکل‌هایی را می‌داد، که تا آن زمان، مورد مطالعه قرار گرفته بود. از آن به بعد، بسیاری از ریاضی‌دانان، دیگر اختلافی بین منحنی‌هایی که بایک دستور داده شده‌اند بامنحنی‌هایی که با چند دستور داده می‌شوند، قایل نبودند. علاوه بر این، $y = f(x)$ را به معنای هر قاعده‌ای، ولو بغرنج، گرفتند که، برای هر مقدار ثابت x ، مقدار y را به دست بدهد، مثلاً، قاعده می‌توانست چنین باشد: وقتی که x زوج است داریم $y = 1$ ، وقتی که x فرد است داریم $y = -1$ ، و برای همه مقدارهای دیگر x ، داریم: $y = 0$. ولی، محدودیت قبلی، به جای خود باقی ماند. قاعده می‌بایست طوری باشد که، به ازای هر عدد مفروض x ، عدد ثابتی برای y به دست دهد. ولی، در مساله‌های مربوط به محاسبه‌های واریاسیونی، مجهول نه به صورت عدد، بلکه به صورت منحنی یا سطح، خود را ظاهر می‌کند. مثلاً در این مساله: برای عبور از نقطه A به نقطه B در روی سطح تخم مرغ، کدام منحنی را انتخاب کنیم، تا کوتاه‌ترین راه باشد؟ و یا: اگر یک حباب صابون را در حلقه سیمی «جابدیم»، موقع فرونشستن، که می‌خواهد کمترین مساحت ممکن را داشته باشد، چه سطحی خواهد داشت؟ این مساله‌ها، با مساله‌های ماکزیمم و مینیمم در آغاز آنالیز ریاضی، شباهت زیادی دارند. تنها در این جا، به جای عددی که می‌نیمم ما را تامین می‌کند، باید منحنی یا سطحی را پیدا کرد که این می‌نیمم را به دست دهد.

به این ترتیب، برای منحنی هموار مفروض، طول آن، و برای سطح هموار مفروض، مساحت آن، تثبیت می‌شود. بنابراین، نشانه واقعی تابع، روبه روی ماست و می‌توانیم بنویسیم: $s = f(C)$ و $A = f(S)$ ، که در آن، s عبارت است از طول منحنی C و A عبارت است از مساحت سطح S . تابع‌هایی از این نوع را، آرتسل و ولتر در سال ۱۸۸۹ مورد مطالعه قرار دادند. مقاله آرتسل در «*Rendiconti Lincei*» با عنوان «*Funzioni di linee*» چاپ شد که بهتر است به صورت «تابع‌های منحنی‌ها» ترجمه شود. در سال ۱۹۰۳، آدامار مقاله «عمل‌های تابعی» را چاپ کرد که، در واقع، عبارت بود از نگاشت «عدد $\rightarrow$ تابع». انتگرال می‌عین، که به عنوان نخستین مثال در این فصل آوردیم، می‌تواند ساده‌ترین نمونه «تابعی‌ها» («فونکسیونل‌ها») به حساب آید.

در تکامل تاریخی مفهوم تابع، در این مرحله، آوند (آرگومان) چیزی بیش از يك عدد نبود، ولی نتیجه می توانست چیز دیگری باشد. می بایست، با طرح پرسشی، گام آخر برداشته شود: «به چه مناسبت در $y = f(x)$ یا $x \rightarrow y$ نمی توان x و y را، هر موضوع دلخواهی گرفت؟» و این گام برداشته شد. مثلاً، در مثال حباب صابون، با این شرط که شکل حلقه سمی به صورتی يك ارزشی شکل حباب صابون را معین کند، می توانیم بنویسیم: $S = f(R)$ ، که در آن، R به معنای شکل حلقه و S ، شکل حباب صابون است.

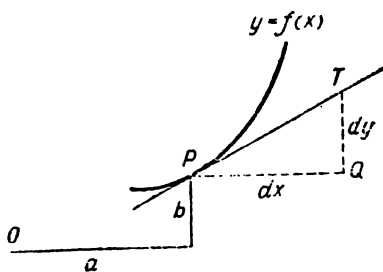
کاملاً امکان دارد که، در سال ۱۷۰۰ هم، کسی اندیشه تابع هایی را در سر پرورانده باشد که به هر نوع چیزی مربوط باشند. ولی احتمال نمی رود که، می توانست به نتیجه های بیشتری برسد. کمتر پیش می آید که يك کشف اساسی در نتیجه طرح يك پرسش خوب انجام گیرد، باید نمونه ها و مثال های فراوانی پیداشود که، نتیجه های حاصل از آن ها، به تدریج، اندیشه مربوط به کشف را تلقین کنند. در سال ۱۹۰۰، آگاهی های زیادی درباره محاسبه واریاسیونی، معادله های انتگرالی و دیگر زمینه های آنالیز ریاضی روی هم جمع شده بود و امکان تنظیم نظریه کلی تابع ها را فراهم آوردند.

در آنالیز کلاسیک، نخستین پرسشی که برای مطالعه تابع ها مطرح می شود، پرسش مربوط به پیوستگی تابع هاست: آیا تغییر کوچکی از x در تابع $y = f(x)$ ، به تغییر کوچکی از y ، منجر می شود؟ در نظریه کلی، وقتی که x و y می توانند هر موضوع دلخواهی باشند، باز هم در جست و جوی پیوستگی هستیم. مثلاً این پرسش را طرح می کنیم: آیا تابع «حباب $\rightarrow$ دوره» پیوسته است؟ در این جا هم، منظور ما از پیوستگی، شبیه حالت کلاسیک است: آیا تغییر کوچکی از دوره، منجر به تغییر کوچکی از شکل حباب می شود؟ از این هم، می توان جلوتر رفت و به تعمیم بعدی اندیشه آنالیز علاقه مند شد. اگر x و y ، موضوع هایی غیر از عدد هستند، آیا می توان معادله $dy = f'(x)dx$ را به دست آورد و برای آن معنایی پیدا کرد؟ و فرهشه در سال ۱۹۲۵ ثابت کرد که، در بعضی موقعیت های معین، می توان به چنین نتیجه ای دست یافت.

مشتق فرهشه

کار فرهشه بی اندازه عمیق است و، مثل هر کار عمیقی، استعداد مولف

آن را، در تشخیص و جدا کردن اندیشه‌ای کاملاً ساده، نشان می‌دهد. فره‌شه، با توجه به گام‌های نخستین آنالیز ریاضی، چنان روشی برای شرح آن‌ها پیدا کرد که می‌توانست برای موقعیت‌های کاملاً کلی ترهم، مفید و ثمربخش باشد. وقتی که می‌خواهیم برای نخستین بار با مشتق آشنا شویم، معمولاً، به شکلی شبیه شکل ۷۰ متوسل می‌شویم. منحنی $y = f(x)$ ، از نقطه P به مختصات (a, b) می‌گذرد؛ KT مماس بر منحنی در این نقطه است. روی شکل دیده می‌شود که، منحنی $y = f(x)$ و مماس PT ، در نزدیکی نقطه P ، تقریباً اختلافی ندارند. یعنی مماس، در نزدیکی این نقطه، همان خط راستی است که بهترین تقریب را از منحنی می‌دهد. نظریه مشتق‌گیری، امکان می‌دهد تا به دو پرسش، پاسخ بدهیم: (۱) آیا خط راستی وجود دارد که به منحنی نزدیک باشد، و (۲) اگر چنین خط راستی وجود دارد، کدام است؟ از آن جا که، در بخش مقدماتی آنالیز ریاضی، تکیه اصلی بر پرسش دوم است، کوشش می‌کنیم که ضریب زاویه خط مماس را پیدا کنیم. بعدها، که باروش ظریف‌تر تحلیلی آشنا می‌شویم، به اهمیت پرسش اول پی می‌بریم. با منحنی‌های «پریپچ و تابی» بر می‌خوریم که نمی‌توانیم، خط راستی برای تخمین رفتار آن‌ها پیدا کنیم.



شکل ۷۰

روی شکل ۷۰، طول‌های PQ و QT ، با dx و dy نام‌گذاری شده‌اند. بنابراین، (dx, dy) ، مختصات نقطه T است، به شرطی که P را مبدا مختصات بگیریم. در این جا، dx و dy «بی‌نهایت کوچک» در نظر گرفته نشده‌اند. مثلاً، اگر نمودار ما، پاسخ گوی تابع $y = x^2$ باشد، در نقطه $P(1, 1)$ داریم: $dy = 2dx$. اگر $dx = 3$ و $dy = 6$ بگیریم و نقطه تازه را در ۳

واحدی شرق و ع واحدی شمال نقطه P فرض کنیم. روی خط مماس واقع خواهد شد. اندیشه کوچک بودن dx و dy ، تنها وقتی به وجود می آید که بخواهیم از خط مماس برای ارزیابی رفتار منحنی استفاده کنیم. چرا که خط مماس، تنها در نزدیکی نقطه P ، به منحنی نزدیک می شود. فرض می کنیم: $dx = 0/001$ و $dx = 0/002$ ، می توان این طور به حساب آورد که، نقطه با مختصات $(1/001, 1/002)$ (نسبت به دستگاه مختصات اولیه)، که بر خط مماس قرار دارد، به تقریب بر منحنی هم قرار گرفته است.

باتوجه به این مطلب، مماس در نقطه P را می توان به عنوان خط راستی تعریف کرد که بهترین تقریب را از نمودار $y = f(x)$ در نقطه P می دهد. مسأله دیفرانسیل گیری هم عبارت است از پیدا کردن این بهترین تقارب خطی. به همین دلیل است که، در این فصل، درباره معنا و فراگیری واژه «خطی» به تفصیل بحث کردیم و آن را تعمیم دادیم. از آن جا که تقارب خطی تابع، به مشتق آن بستگی دارد، می توان اندیشه مشتق گیری را هم بسط داد. در هر موقعیتی که با نگاشتی بغرنج سروکار داشته باشیم، حق داریم پرسیم: آیا می توان یک نگاشت خطی پیدا کرد که بتواند، در حوزۀ محدودی، تقریب خوبی برای نگاشت مفروض ما باشد؟ و اگر چنین نگاشت خطی وجود دارد، کدام است؟ نظریه ای که به این پرسش ها پاسخ می دهد، همان نظریۀ دیفرانسیل گیری است. این نظریه، شبیه محاسبۀ دیفرانسیلی عادی، به ما کمک می کند تا هم خود نتیجه گیری ها را پیش بینی کنیم و هم روش کاربرد آن ها را به دست آوریم.

در آنالیز معمولی، تقارب خطی را می توان، اغلب، به طریق جبری محاسبه کرد. به مثالی توجه کنیم: می خواهیم، رفتار منحنی $y = x^2$ را در نزدیکی نقطه $(1, 1)$ مشخص کنیم. $x = 1 + h$ می گیریم، به دست می آوریم: $y = 1 + 2h + h^2$. وقتی که h به اندازه کافی کوچک باشد، h^2 باز هم کوچکتر می شود: وقتی که مثلاً h یک هزارم باشد، h^2 یک ملیونیم است. اگر از مقدار h^2 صرف نظر کنیم، می توانیم نقطه $x = 1 + h$ ، $y = 1 + 2h$ را

در نزدیکی نقطه واقع بر منحنی پیدا کنیم. اگر مقدار کوچک h را تغییر دهیم، همیشه به نقطه‌ای می‌رسیم که بر خط راست معرف تقارب خطی منحنی واقع است، و به صورت مماس بر منحنی در نقطه P درمی‌آید. ضمناً می‌توانیم بنویسیم: $dx = h$ و $dy = 2h$ و نتیجه بگیریم که $dy = 2dx$ ، و این، همان معادله خطی است که مماس را معین می‌کند. در این روش، از همه جمله‌ها، به جز جمله‌های خطی، صرف نظر می‌کنیم و، بنابراین، طبیعی است که به یک رابطه خطی برسیم. در مورد موقعیت‌هایی هم که کمتر با آن‌ها آشنا هستیم، به همین ترتیب، می‌توان عمل کرد. فرض کنیم، با نگاشت فضای دوبعدی بر فضای دوبعدی سروکار داشته باشیم: $(u, v) \rightarrow (x, y)$ ، که در آن، $u = 3x^2 + y^2$ و $v = xy$ می‌خواهیم بدانیم که، وضع، مثلاً در نزدیکی نقطه $(1, 2)$ چگونه است؟ اگر $x = 1 + h$ و $y = 2 + k$ بگیریم، به دست می‌آید:

$$u = 7 + 6h + 2k + \dots$$

$$v = 2 + 2h + k + \dots$$

نقطه‌ها، نشانه جمله‌هایی هستند که، اگر h و k را با مرتبه هزارم اندازه گرفته باشیم، با مرتبه ملیونیم اندازه گرفته می‌شوند. از این جمله‌ها، صرف نظر می‌کنیم و تقارب خطی را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} du = 6dx + 2dy \\ dv = 2dx + dy \end{cases} \quad (1)$$

اگر (du, dv) را dU و (dx, dy) را dX بنامیم، می‌توانیم دستگاه معادله‌های (۱) را به صورت فشرده‌تری بنویسیم: $dU = M dX$ ، که در

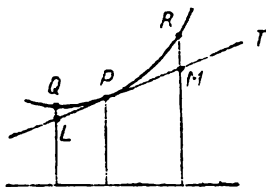
آن، M به معنای ماتریس $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ است که، در این جا، نقش مشتق را

به عهده دارد.

ماکزیمم و می‌نیمم

یکی از مسأله‌های مورد بررسی در آنالیز ریاضی، مسأله مربوط به جست‌وجوی ماکزیمم یا می‌نیمم است. این مسأله، در خط‌های کلی خود،

به این ترتیب حل می شود. فرض می کنیم، مماس PT ، که بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه P رسم شده است، شبیه شکل ۷۱، به طرف بالا برود. بنابراین،



شکل ۷۱

نقطه P نمی تواند ماکزیمم باشد، زیرا برای چنین مماسی، وقتی که روی آن از چپ به راست حرکت کنیم، همیشه می توان نقطه M را، که در بالای نقطه P قرار دارد، پیدا کرد. چون مماس، بهترین تقریب منحنی را می دهد، پس به ازای M ، که به اندازه کافی به P نزدیک است، می توان نقطه R واقع بر منحنی را پیدا کرد، که خیلی نزدیک به M و، ضمناً، در بالای P باشد. بنابراین، در این حوالی، P نمی تواند بالاترین نقطه منحنی باشد. به همین ترتیب، نقطه P ، پایین ترین نقطه هم نمی تواند باشد. وقتی که از نقطه P به طرف چپ حرکت کنیم، نقطه L را روی مماس پیدا می کنیم که پایین نقطه P قرار دارد. نزدیکترین نقطه منحنی به P ، یعنی نقطه Q هم، پایین تر از P واقع است، یعنی نقطه P نمی تواند پایین ترین نقطه حوالی خود باشد.

این بحث را باید دقیق تر کرد. روی شکل ۷۱، نقطه Q بالای نقطه L قرار گرفته است. در اثبات تفصیلی، باید با دقت ثابت کنیم که Q نمی تواند آن قدر بالای L واقع شود که بالاتر از P هم قرار گیرد. این موضوع را، می توان به طور کامل روشن کرد، ولی ما، در این جا، به آن نمی پردازیم.

به همین ترتیب، می توان ثابت کرد، در نقطه ای که، در آن جا، شیب مماس به طرف پایین است، باز هم نمی توانیم ماکزیمم یا مینیم داشته باشیم. اکنون می توان نتیجه گرفت که، تنها نقطه ای که می تواند چنین خاصیتی داشته باشد، جایی است که مماس در آن افقی باشد^۱. این حقیقت، اساس جست و جوی

۱. ما از حالت هایی که، در آن ها، $f'(x)$ وجود ندارد و یا از مساله هایی که، در آن ها، حوزه تعریف محدود است، صرف نظر کرده ایم. مثلاً، حالتی را در نظر

معمولی ماکزیمم و می نیمم است، که از طریق حل معادله $f'(x) = 0$ و برخی تحقیق های بعدی، تحقق می پذیرد.

می خواهیم، با استفاده از این روش آشنا، ابتدا به مساله ای با سه بعد پردازیم و، سپس، ثابت کنیم که از این روش در مورد مساله های بی نهایت بعدی هم می توانیم استفاده کنیم. ممکن است کسی، در مورد نظر اخیر ما، اندیشه کاملاً تازه ای را ببیند. ولی در واقع، این طور نیست. دشواری (اگر در این جا هم ظاهر شود)، به آن جا مربوط می شود که، ضمن بررسی مساله، به تعدادی نمادهای سنتی و قانون های محاسبه، نیاز داریم. بنابراین، به خواننده ای که خیال ندارد به این کار پردازد، توصیه می کنیم، خیلی ساده، به آخر این فصل مراجعه کند تا از تأثیر کلی مساله ای که، مشتق فرشه را در مورد آن به کار برده ایم، احساس رضایت کند.

به این ترتیب، ابتدا به موقعیتی می پردازیم که دارای سه بعد باشد. به عنوان مثال، می توانیم سطح فنجانی شکل $z = x^2 + y^2$ را در نظر بگیریم. می توان ثابت کرد که نقطه $(x + dx, y + dy, z + dz)$ ؛ با شرط $dz = 2x \cdot dx + 2y \cdot dy$ ، بر صفحه مماس بر سطح مفروض، در نقطه (x, y, z) ، قرار دارد. در حالت کلی تر، می توان سطح $z = f(x, y)$ را، با صفحه مماس بر آن در نقطه P ، به معادله $dz = p dx + q dy$ در نظر گرفت. روشن است که، به ازای $p = 0$ و $q = 0$ ، داریم: $dz = 0$ (برای هر مقدار dx و dy)، یعنی صفحه مماس، افقی است. ثابت می کنیم، این تنها حالتی است که ممکن است، در آن، ماکزیمم یا می نیمم داشته باشیم. اگر صفحه مماس را در نظر بگیریم، بعضی از نقطه های آن بالا و بعضی دیگر پایین P قرار می گیرند. تصور هندسی موضوع، دشوار نیست؛ ولی برای اثبات جبری آن، توجه بیشتری لازم است. اگر در عبارت $dz = p dx + q dy$ ، تبدیل $dx = p$ و $dy = q$ را انجام دهیم، به دست می آید: $dz = p^2 + q^2$ که

→

بگیرید که می خواهیم ماکزیمم x^2 را، به ازای مقادیر مثبت x که از ۱۰ تجاوز نمی کنند، پیدا کنیم. در این جا، ماکزیمم، به ازای $x = 10$ به دست می آید که، در آن جا، ضریب زاویه مماس برابر ۲۰ است و نه ۰

مقداری مثبت است و نقطه‌ای را مشخص می‌کند که بالای نقطه P واقع است. به همین ترتیب، با تبدیل $dx = -p$ و $dy = -q$ به دست می‌آید: $dz = -p^2 - q^2$ که مقداری منفی است و نقطه‌ای پایین نقطه P را مشخص می‌کند. به این ترتیب، معلوم می‌شود که روی صفحه مماس، جهت‌هایی به طرف بالا و به طرف پایین وجود دارد. اگر به فاصله کوتاهی، در یکی از این جهت‌ها حرکت کنیم، به نقطه‌هایی می‌رسیم که یا در بالا و یا در پایین نقطه P قرار دارند.

به این مناسبت، ما کریمیم یا می‌نیم، تنها در حالتی می‌تواند وجود داشته باشد که داشته باشیم: $p = 0$ و $q = 0$. در هیچ مورد دیگری، این وضع پیش نمی‌آید. در مثال خاص $z = x^2 + y^2$ داریم $dz = 2xdx + 2ydy$ ، یعنی $p = 2x$ و $q = 2y$. بنابراین، شرط $p = q = 0$ به معنای $x = 0$ و $y = 0$ است. و این، در واقع، می‌نیم را در نقطه «تدفجان» می‌دهد که، بدون مراجعه به آنالیزهم، می‌توانستیم آن را حدس بزنیم.

فضای بی‌نهایت بعدی

تابع‌های پیوسته (پایان فصل هفتم را ببینید)، تشکیل یک فضای بی‌نهایت بعدی می‌دهند. نگاشتی از نوع «عدد $\rightarrow$ تابع پیوسته» را در نظر می‌گیریم. $y = f(x)$ را نمودار تابع پیوسته‌ای می‌گیریم که برای x در فاصله از ۰ تا ۱ داده شده است. فرض می‌کنیم، عدد a با این معادله معین شود:

$$a = \int_0^1 (2xy - y^2) dx \quad (2)$$

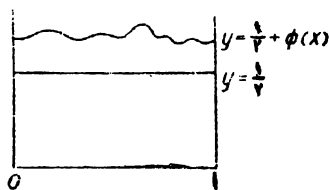
آن وقت، نگاشت $a \rightarrow f(x)$ ، نگاشت‌هایی را به یاد می‌آورد که در ابتدای این فصل، مورد بررسی قرار داده‌ایم: شما تابع انتخابی $f(x)$ را به من بگویید من عدد a را، که در نتیجه قرارداد دادن $y = f(x)$ در سمت راست معادله (۲) و محاسبه انتگرال معین مورد نظر به دست می‌آید، به شما می‌دهم. در زیر نمونه تابع‌هایی را که می‌توانستیم انتخاب کنیم، و مقدار متناظر آن‌ها را برای a ، داده‌ایم می‌آوریم:

$y = f(x)$	a
$y = 0$	0
$y = \frac{1}{3}$	$0/25$
$y = 1$	0
$y = x$	$0/3333000$
$y = 1 + x$	$-0/6666000$
$y = x^2$	$0/3$

قبل از هر چیز، یاد آور می شویم که، این، يك نگاهت غیر خطی است. اگر این نگاهت، خطی بود، آن وقت عدد a متناظر با تابع $y = 1 + x$ را می توانستیم با جمع عددهای متناظر با تابع های $y = 1$ و $y = x$ به دست آوریم. از این گذشته عدد متناظر $y = 1$ ، دو برابر عدد متناظر با $y = \frac{1}{3}$ می شد. ولی، از جدول بالا دیده می شود که هیچ کدام از این دو مورد، تطبیق نمی کند.

ممکن است علاقه مند باشیم تابعی را پیدا کنیم که، برای a ، حداکثر مقدار را تأمین کند. در جدول بالا، این حداکثر برابر $0/3333000$ و متناظر با تابع $y = x$ است. آیا واقعاً همین تابع است که حداکثر مقدار را برای a تأمین می کند و یا تابع دیگری است که در جدول ما وجود ندارد؟ فرض می کنیم، این پرسش را، بعد از محاسبه سه سطر اول، مطرح کنیم.

در این صورت، $y = \frac{1}{3}$ ، حداکثر مقدار را برای a می دهد: $0/25$. شبیه بحثی که قبلاً داشتیم، احتمالاً بتوان روشن کرد که، آیا نمودار دیگری غیر از نمودار $y = \frac{1}{3}$ ، وجود دارد که، برای آن، مقدار a کمی بیشتر از $0/25$ شود؟ اگر بتوانیم این مطلب را ثابت کنیم، آن وقت معلوم می شود که جهتی به طرف بالا وجود دارد و، در نتیجه، نمی توانیم با ماکزیمم سروکار داشته باشیم. برای این منظور، نمودار $y = \frac{1}{3} + \varphi(x)$ را در نظر می گیریم، با این



شکل ۷۲

شرط که (شکل ۷۲ را ببینید)، برای هر x از $[0, 1]$ ، مقدار $\varphi(x)$ ، به اندازه کافی کوچک باشد. تبدیل $y = \frac{1}{4} + \varphi(x)$ دربرابری (۲)، این عدد را به ما می دهد.

$$(۲') \quad 0/۲۵ + \int_0^1 (2x - 1) \varphi \cdot dx - \int_0^1 \varphi^2 dx$$

برای ساده کردن این عبارت، دوباره از این نکته استفاده می کنیم که اگر φ در مرتبه هزارم باشد، φ^2 در مرتبه میلیونیم قرار می گیرد و، بنابراین، می توان از آن صرف نظر کرد. یعنی، برای این که به تقاربی خطی برسیم، جمله آخر $\int_0^1 \varphi^2 dx$ را کنار می گذاریم. چون جمله اول $0/۲۵$ ، عددی است متناظر با $y = \frac{1}{4}$ ، بنابراین، تغییر تقریبی عدد $(۲')$ ، به وسیله جمله دوم به دست

می آید. به این ترتیب، تغییر y از $\frac{1}{4}$ تا $\frac{1}{4} + \varphi$ ، موجب تغییر تقریبی a از

$0/۲۵$ تا $0/۲۵ + \alpha$ می شود، که در آن

$$(۳) \quad \alpha = \int_0^1 (2x - 1) \varphi \cdot dx$$

ضمناً یادآوری می کنیم که نگاشت $\varphi \rightarrow \alpha$ ، یک نگاشت خطی است، یعنی معادله (۳) شبیه تقاربی است که قبلاً داشتیم؛ همان طور که خط مماس به قطعه کوچکی از منحنی نزدیک است، صفحه مماس هم به قطعه کوچکی از سطح نزدیک است.

آیا، در این حالت، می توانیم «از کوه بالا برویم»؟ آیا تغییر کوچکی برای φ وجود دارد که، به ازای آن، α مقداری مثبت شود؟ اگر فرض کنیم:

$\varphi(x) = 0.001(2x - 1)$ ، به دست می آید:

$$\alpha = 0.001 \int_0^1 (2x - 1)^2 dx$$

که باید مثبت باشد، زیرا شامل مربع يك عبارت است.

می توان تحقیق کرد که $y = \frac{1}{4} + 0.001(2x - 1)$ ، منجر به مقداری

از a می شود که کمی بیشتر از مقدار متناظر با $y = \frac{1}{4}$ است و ، در نتیجه ،

$$y = \frac{1}{4}$$

نمی تواند ماکزیم را به ما بدهد.

به این ترتیب، تاحدی روشن کردیم که، چگونه می توان بحث فوق را

نه تنها برای $y = \frac{1}{4}$ ، بلکه برای هر حالتی از $y = f(x)$ - که گمان می کنیم

منجر به ماکزیم می شود، به کار برد. فرض می کنیم که تغییر $f(x)$ به

$f(x) + \varphi(x)$ ، متناظر است با تغییر تقریبی عدد از a به $a + \alpha$ (از φ^2)

صرف نظر می کنیم). بامحاسبه ای، شبیه آن چه در بالا داشتیم، به جای معادله

(۳)، به این معادله می رسیم:

$$\alpha = \int_0^1 2(x - f)\varphi \cdot dx \quad (4)$$

مثل قبل، $\varphi = 0.001(x - f)$ می گیریم، به دست می آید:

$$\alpha = \int_0^1 0.002(x - f)^2 dx$$

زیر علامت انتگرال، دوباره به مجذور کاملی می رسیم که نمی تواند منفی

باشد. بلافاصله معلوم می شود که، در این جا، ماکزیمی نمی تواند وجود داشته

باشد. و این، به معنای آن است که، برای هر تابع انتخابی $f(x)$ ، همیشه

می توانیم تغییر کوچکی قایل شویم که متناظر با افزایشی برای عدد متناظر

باشد. ولی، در این بحث، يك امکان را فراموش کرده ایم. اگر داشته باشیم

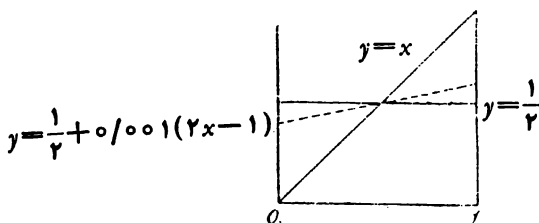
$f(x) = x$ ، آن وقت $x - f = 0$ و معادله (۴) نشان می دهد که، برای

همه مقدارهای ممکن φ ، داریم: $\alpha = 0$. در این حالت، به صفحه راس کوه

رسیده ایم، در آن، هر خط مماس افقی است و راهی به طرف بالا وجود ندارد.

بحث روشن می کند که تنها در حالت $y = x$ ، چنین وضعی پیش می آید.

در مقدمات آنالیز ریاضی، بررسی ماکزیمم و می نیمم، جای خاصی برای خود دارد. ماکزیمم و می نیمم را باید درجایی جست و جو کرد که مماس افقی دارد. وقتی که چنین نقطه‌هایی پیدا شد، روشن می کنند که، آیا فلان نقطه به ماکزیمم مربوط می شود یا می نیمم و یا تنها يك نقطه مشکوک است.



شکل ۷۳

روشن است که، در مثال ما، کاری که انجام دادیم، تنها متناظر با بخش اول، یعنی جست و جوی مماس‌های افقی است. وقتی که من نتیجه می گیریم که، شرط $y = x$ ، متناظر با راس کوه است، شما تنها به حرف من اعتماد می کنید، زیرا من هیچ پاسخی به این پرسش نداده‌ام که، چگونه می توانیم راس کوه را با ته دره و یا يك گذرگاه کوهستانی از هم تمیز دهیم.

روی شکل ۷۳، فرض اولیه $y = \frac{1}{2}$ ، فرض تکمیلی

$y = \frac{1}{2} + 0.001(2x-1)$ و، بالاخره، جواب نهائی $y = x$ داده شده

است. ممکن است گمان کنیم که، آزمایش با $y = \frac{1}{2}$ بوده که ما را به سمت جواب

نهائی راهنمائی کرد. نمودار $y = \frac{1}{2}$ ، نسبت به جواب $y = x$ ، در نیمه اول

فاصله خیلی بالا و در نیمه دوم فاصله خیلی پایین است. آزمایش ما، در این جهت است که این خط را تصحیح کند. این آزمایش، بخش اول نمودار را پایین می آورد و بخش دوم آن را بالا می برد. همین وضع، روشی را به ما تلقین می کند که می توان، در همه مساله‌های عملی که در مورد آن‌ها راه حل نظری

شناخته شده‌ای وجود ندارد، از آن استفاده کرد. نسخه و دستورکار، ساده است: از جایی آغاز کنید که بتوان از کوه بالا رفت. هیچ ضمانتی وجود ندارد که، این راه، شما را به بلندترین قله برساند، ولی در صورت موفقیت، دست کم به بالای تپه‌ای دسترسی پیدا می‌کنید. اگر صعود را از جاهای مختلف تکرار کنید، می‌توانید تصویری در این باره پیدا کنید که، قله در کجا قرار گرفته است.

۹

دوران یعنی چه؟

در فصل اول، تصویری دربارهٔ وجود هندسهٔ آفینی پیدا کردیم، اکنون می‌خواهیم کوشش کنیم که این تصور را دربارهٔ وجود هندسهٔ اقلیدسی به دست آوریم. بهتر است که از هندسهٔ روی صفحه آغاز کنیم. در این جا، محاسبه‌ها، مقدماتی خواهند بود و به قضیهٔ فیثاغورث و برخی از عنصرهای جبر، به خصوص دستور $(a-b)^2$ ، منجر می‌شوند. بنابراین، بسیاری از مطالب این فصل، می‌تواند مورد استفادهٔ دانش‌آموزان سال‌های پایین‌تر هم قرار گیرد. گمان می‌کنم، این بحث، برای دانش‌آموزانی که دائماً از خود می‌پرسند «حالا چه باید کرد؟» مفید باشد.

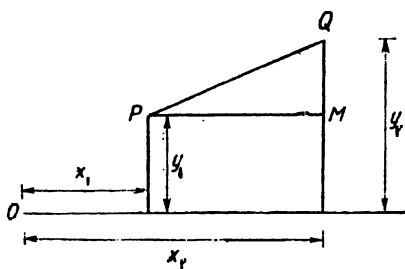
بعد از این بحث ساده، سعی می‌کنیم آن را برای فضای n بعدی تعمیم دهیم. این فصل به ما کمک می‌کند تا بفهمیم که، چگونه موضوع‌های ریاضی، به صورت انتزاعی در می‌آیند. وقتی که دربارهٔ وجود خودمان صحبت می‌کنیم، ضرورتاً امری انتزاعی است، ولی وقتی که دربارهٔ آثار وجودی، و مثلاً نامه‌ای که بین خود رد و بدل کرده‌ایم، بحث می‌کنیم، می‌توانیم از آن استفاده کنیم. مثل این است که ما در درون موضوع قرار گرفته باشیم و «وجود» در بیرون آن باشد؛ و این، در اختلاف موقعیت معلم و شاگرد تظاهر می‌کند. ممکن است گمان رود که، انتزاعی بودن، به معنای آن است که نمی‌دانیم دربارهٔ چه چیزی صحبت می‌کنیم. ولی، در واقع، کاملاً این طور نیست. ریاضیات، مفهوم انتزاعی را، از راه مطالعهٔ موقعیت‌های مختلفی به دست می‌آورد که به خوبی آنها را می‌شناسد و خیلی خوب می‌داند که از چه چیزهایی تشکیل شده‌اند. وقتی که کوشش می‌کند خط‌های کلی

موجود در آن را جدا کند و تنها به نکته‌هایی توجه کند که، در همه این موقعیت‌های مختلف، مشترک است، در واقع، می‌خواهد نظریه‌ای کلی بسازد که همه این موردهای خاص را دربرگیرد. این نظریه، تنها به این معنا انتزاعی است، که از همه آنچه که موجب به‌خاطر آوردن این یا آن مورد مشخص می‌شود، صرف نظر می‌کند.

ابتدا روشن می‌کنیم که، هندسه مسطحه، وجود دارد. با تکیه بر تجربه‌ای که از کار با کاغذ شطرنجی داریم، تعریف‌های اصلی آن را می‌دهیم. نخستین آن‌ها، تعریف نقطه است.

تعریف ۱. نقطه P آن چیزی است که با زوج عدد $(x$ و $y)$ مشخص می‌شود.

بعد، می‌خواهیم فاصله بین دو نقطه $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ را معین کنیم. این کار را چگونه باید انجام داد؟ دانش‌آموزان، احتمالاً از مثال‌های عددی آغاز می‌کنند، تا به تدریج، به سمت استدلال کلی راهنمایی شوند.



شکل ۷۴

با توجه به شکل ۷۴، فاصله بین نقطه‌های P و Q ، به سادگی و به کمک قضیه فیثاغورث، به دست می‌آید:

$$PQ^2 = PM^2 + MQ^2$$

که در نتیجه به دست می‌آید:

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

به نحوی که پیام بعدی ما درباره وجود، به این صورت جلوه می کند.

تعریف ۲. فاصله PQ ، از نقطه $P(x_1, y_1)$ تا نقطه $Q(x_2, y_2)$ عبارت است از

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

چه بسا که، انتخاب این دستور، نوعی تردید پدید آورد. به چه مناسبت، از بین مجموعه دستورهای ممکن برای فاصله، درست این دستور را انتخاب کرده ایم؟

البته، اگر تنها به هندسه می پردازیم، هرگز چنین تعریفی به ذهنمان نمی رسد. دو هزار سال تجربه هندسی، پشت این فکر، خوابیده است. دیدگاه های صوری، اصل موضوعی، انتزاعی و قیاسی را، در ریاضیات، باید مرحله نهایی موضوع آن دانست و نه مرحله آغازین آن. و این، يك مطلب اساسی است که باید به آن توجه داشت. به این نکته هم باید توجه داشت که، نظم پیشرفت اندیشه های مربوط به هندسه، دچار تغییر می شود. قضیه فیثاغورث، چهل و هفتمین گزاره از کتاب اول «مقدمات» اقلیدس است که خود نقطه اوج هندسه را نشان می دهد. همین گزاره، شامل تعریف ۲ می شود که ما می خواهیم به آن، هستی ببخشیم.

ما، معمولاً از مفهوم فاصله چیزی را می فهمیم که، به خودی خود، عقلانی و نیازی به تعریف صوری آن احساس نمی کنیم. ولی وقتی که قصد می کنیم از شیوه انتزاعی استفاده کنیم (یعنی می کوشیم تابعی از حقیقت ها را، به نحوی، با مفهوم های «وجودی» بیان کنیم)، خود را ناچار می بینیم که، برای این مفهوم به خودی خود عقلانی هم، تعریفی پیدا کنیم. وقتی که، به این ترتیب، به کار می پردازیم، پرسش های زیادی در برابر ما قرار می گیرد: اگر جهان را با دستوری غیر از دستور تعریف ۲ «بسازیم»، چگونه جهانی خواهد بود؟ همین پرسش، ما را به سمت هندسه های نااقلیدسی و فضا های متریک هدایت می کند. (فضایی را متریک گویند که بتوان، در آن، به نحوی فاصله را تعریف کرد.) این اندیشه، به خصوص وقتی روشن می شود که، به جای دستور $PQ^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ ، دستور تصادفی

دیگری را برای فاصله، در نظر بگیریم. مثلاً، اگر جهانی را در نظر بگیریم که، در آن، فاصله با دستور $PQ^4 = (x_1 - x_2)^4 + (y_1 - y_2)^4$ تعریف می‌شود، به سادگی می‌توانیم روشن کنیم که، در این جهان، چرخش به اندازه ۱۸۰ درجه ممکن نیست. یعنی، اگر صورت ما، در لحظه تولد به هر طرفی باشد، در تمام زندگی به همان طرف باقی خواهد ماند. این حقیقت را، کمی بعد، به دو طریق روشن خواهیم کرد. پیام بعدی، در این باره، به حرکت جسم‌های سخت (صلب) مربوط می‌شود. با نشان دادن جسم‌های کشسان (دستمالی، لوله لاستیکی) و ناکشسان (آجر، میله فولادی) می‌توانیم این پرسش را مطرح کنیم: اختلاف در حرکت این جسم‌ها، از کجا ناشی می‌شود؟ در جریان بحث درباره این پرسش، روشن می‌شود که، ضمن جابه‌جایی جسم ناکشسان (یا آن‌طور که معمولاً می‌گویند: جسم صلب مطلقاً سخت) در فضا، فاصله بین هر دو نقطه آن، بی‌تغییر می‌ماند.

چون در جریان حرکت، هر نقطه جسم، از موضع اولیه خود، P ، به نقطه نهائی خود، P^* ، می‌رود، بنابراین، با نگاشت $P \rightarrow P^*$ سر و کار داریم و می‌توانیم تعریف زیر را تنظیم کنیم.

تعریف ۳. ایزومتري (همان‌متری) به حرکت جسم سخت گفته می‌شود که، ضمن آن، فاصله بین نقطه‌ها بی‌تغییر می‌ماند، یعنی، به ازای $P \rightarrow P^*$ و $Q \rightarrow Q^*$ ، همواره داشته باشیم: $PQ = P^*Q^*$. مثلاً، نگاشت اتحادی، نمونه‌ای از ایزومتري است، زیرا، ضمن آن، وضع متقابل نقطه‌ها تغییر نمی‌کند، در ضمن، روشن نیست که مثال دیگری هم برای ایزومتري وجود دارد و، از آن مهم‌تر، هندسه‌هایی وجود دارد که، در آن‌ها، هیچ‌کدام از حرکت‌های اصلی، ممکن نیست. نمونه این‌گونه هندسه‌ها، عبارت است از هندسه روی سطح مجسمه. اگر مجسمه‌ای را، به‌طور کامل، با زره‌های کیپ و چسبنده‌ای بپوشانیم، آن وقت، نمی‌توان آن‌ها را بر سطح مجسمه لغزانید: برای چنین زره‌هایی، در روی مجسمه، تنها يك موقعیت مناسب پیدا می‌شود، همان موقعیتی که در لحظه مفروض، به‌خود گرفته‌اند از آن‌جا که تعریف ۲، برای شرح این موقعیت مناسب است، بنابراین، تلاش ما

برای لغزیدن، به عنوان نمونه‌ای از ایزومتري، بی‌معنی خواهد بود. وجود انواع گوناگون ایزومتري، نیاز به اثبات دارد.

در فصل اول هم، با ایزومتري روبه‌رو شده بودیم. در شکل ۴، نتیجه انتقال $x^* = x + 2, y^* = y + 1$ ، نشان داده شده است. می‌توان ثابت کرد که این، يك ایزومتري است. در واقع داریم: $x_2^* - x_1^* = x_2 - x_1$ و $y_2^* - y_1^* = y_2 - y_1$. اگر PQ و P^*Q^* را با دستور تعریف ۲ پیدا کنیم، قانع می‌شویم که $PQ = P^*Q^*$. از آن‌جا که این نتیجه، برای هر انتقال موازی به دست می‌آید، دو پیام زیر را خواهیم داشت:

تعریف ۴. هر نگاشت به صورت $x^* = x + a, y^* = y + b$ ، انتقال موازی نامیده می‌شود.

قضیه ۵. هر انتقال موازی، يك ایزومتري است.

حرکت دور مبداء مختصات

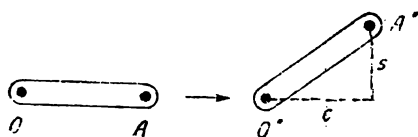
آیا، به جز انتقال‌های موازی، انواع دیگری از ایزومتري وجود دارد؟ به نظر می‌رسد که وجود دارد و، به عنوان نمونه، می‌توان از دوران نام برد. قطعه مقوائی را در نظر می‌گیریم که بتواند آزادانه، روی سطح میز، بلغزد. مقوا را در يك نقطه خود به میز محکم می‌کنیم، به نحوی که دیگر نشود آن را لغزاند، ولی امکان مقوا در دوران دور نقطه ثابت آن، به قوت خود باقی باشد. با فرض این‌که، مقوا، در نقطه مبداء خود O ، با سنجاقی محکم شده باشد، این تعریف را می‌آوریم.

تعریف ۶. حرکت دور مبداء مختصات، عبارت است از نگاشتی که، در آن $O^* = O$.

سعی می‌کنیم، انواعی از ایزومتري را پیدا کنیم که، به ازای آن‌ها، مبداء مختصات بی‌حرکت باشد: $O^* = O$.

از نقطه $A(1, 0)$ آغاز می‌کنیم، که به نقطه A^* می‌رود. گمان نمی‌رود که، در این حالت، بتوان A^* را، به دلخواه انتخاب کرد. باید شرط $OA = OA^*$ را رعایت کرد. می‌توان فرض کرد که نقطه‌های O و A به وسیله

يك ميله فولادی به هم وصل شده‌اند و این میل به نه منبسط می‌شود و نه منقبض (شکل ۷۵ را ببینید). بنابراین، نقطه A^* ، که در نتیجه حرکت نقطه A به دست می‌آید، باید جایی روی محیط دایره به مرکز O و شعاع ۱ قرار گیرد.



شکل ۷۵

از آن جا که فاصله بین نقطه‌های يك جسم سخت تغییر نمی‌کند، باید برابری $OA = O^*A^*$ برقرار باشد. چون دستوری که معرف فاصله OA یا O^*A^* است، به صورت ریشه دوم است (تعریف ۲)، بهتر است برابری را به صورت $(O^*A^*)^2 = (OA)^2$ بنویسیم. قرار می‌گذاریم که، از این به بعد، در حالت برابری دو طول، مربع فاصله‌ها را انتخاب کنیم. در حالتی که نقطه A با مختصات $(s$ و $c)$ معین شده باشد، شرط $OA = O^*A^*$ منجر به این برابری می‌شود:

$$c^2 + s^2 = 1 \quad (۱)$$

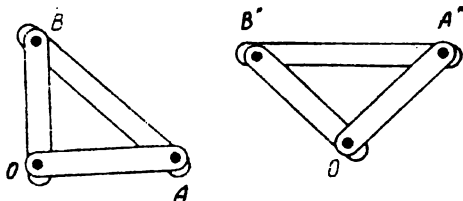
و این، احتمالاً، همه مطلبی است که می‌توانیم درباره نقطه A^* بگوییم. اکنون اگر نقطه $B(0, 1)$ را در نظر بگیریم، بنا بر ایزومتري، OB و AB بی‌تغییر می‌مانند و، به نظر می‌رسد که، نقطه B با دوميله مربوط شده‌است، آن‌طور که در شکل ۷۶ می‌بینید. اگر مختصات نقطه B^* را $(p$ و $q)$ (که با حرکت نقطه B به دست آمده است) بگیریم، آن وقت، شرط‌های $O^*B^* = OB$ و $A^*B^* = AB$ به دو معادله زیر، نسبت به مجهول‌های p و q ، منجر می‌شوند.

$$p^2 + q^2 = 1 \quad (۲)$$

$$(p - c)^2 + (q - s)^2 = 2 \quad (۳)$$

این معادله‌ها را، مثل اغلب موردهای مشابه خود، می‌توان ساده کرد. اگر

پرانته‌ها را در معادله (۳) باز کنیم، در آن، به عبارت‌های $p^2 + q^2$ و



شکل ۷۶

$c^2 + s^2$ می‌رسیم، که بنابر برابری‌های (۲) و (۱) برابر واحدند. در نتیجه، معادله ساده می‌شود و به صورت زیر درمی‌آید:

$$cp + sq = 0 \quad (۴)$$

به ازای $s \neq 0$ ، به دست می‌آید: $q = -\frac{cp}{s}$ ، که اگر در معادله (۲)

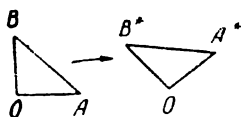
قرار دهیم، بعد از ساده کردن، به صورت $s^2 = p^2(c^2 + s^2)$ درمی‌آید. اگر $c^2 + s^2 = 1$ را در نظر بگیریم، سرانجام، به معادله $p^2 = s^2$ ختم می‌شود و، از آن جا، دو جواب برای p به دست می‌آید: $p = s$ و $p = -s$. مقدار q را هم می‌توان از رابطه $q = -\frac{cp}{s}$ به دست آورد. در نتیجه، برای مسأله

دو جواب حاصل می‌شود: $(a; p = -s, q = +c)$ ؛ $(b; p = +s, q = -c)$. در شکل ۷۷، تعبیر هندسی این دو جواب داده شده است: در حالت a ، به طور ساده، مثلث OAB را چرخانده‌اند و در حالت b ، ابتدا مثلث را چرخانده‌اند و، بعد، در جهت عکس و به طرف بالا برگردانده‌اند.

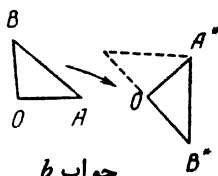
ممکن است اعتراض شود که، واژه «ایزومتري» با دقت جواب b را شرح نمی‌دهد، زیرا بدون این که مثلث OAB را از صفحه کاغذ خارج کنیم، نمی‌توانیم آن را به وضع $O^*A^*B^*$ درآوریم. ولی، باید به یاد داشته باشیم

۱. در حالت $s = 0$ و $c \neq 0$ ، با استفاده از برابری $p = -\frac{qs}{c}$ ، به همان جواب

می‌رسیم. به کمک تبدیل‌های جبری پرنج تری، می‌توان از این تقسیم به حالت‌های مختلف نجات پیدا کرد.



جواب a



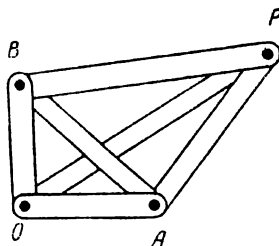
جواب b

شکل ۷۷

که «ایزومتري» به هر نگاشتي گفته می‌شود که فاصله را حفظ کند. اکنون، جواب a را به تفصیل بررسی می‌کنیم و جواب b را، به عنوان تمرین، به عهده خواننده می‌گذاریم.

به این ترتیب، بنابر جواب a ، نقطه A به نقطه $A^*(c, s)$ ، و نقطه B به نقطه $B^*(-s, c)$ می‌رود.

حالا ببینیم که، در این ضمن، برای نقطه دلخواه $P(x, y)$ چه پیش می‌آید. همان‌طور که در شکل ۷۸ دیده می‌شود، می‌توان نقطه P را، در ذهن خود، با میله‌هایی به نقطه‌های O ، A و B وصل کرد. طول میله‌ها،



شکل ۷۸

تغییر نمی‌کند و، بنابراین، مختصات (x^*, y^*) نقطه P^* ، باید در سه شرط زیر صدق کنند:

$$O^*P^* = OP, \quad A^*P^* = AP, \quad B^*P^* = BP$$

در حالت کلی، ممکن است دو مجهول با سه معادله سازگار نباشند. همین نکته، ما را وامی‌دارد تا وجود دوران را ثابت کنیم و «وجود» آن را به عقل سلیم نسپاریم، به خصوص که، در بسیاری از هندسه‌ها، اصولاً دوران وجود ندارد. دوباره به تعریف ۲ برمی‌گردیم که، از بین تعداد کمی دستور که برای دوران پیوسته جسم سخت وجود دارد، از یکی استفاده می‌کند. بنابر تعریف

۲، سه شرط فوق، منجر به سه معادله زیر می شوند:

$$(x^*)^2 + (y^*)^2 = x^2 + y^2 \quad (5)$$

$$(x^* - c)^2 + (y^* - s)^2 = (x - 1)^2 + y^2 \quad (6)$$

$$(x^* + s)^2 + (y^* - c)^2 = x^2 + (y - 1)^2 \quad (7)$$

که در آن ها، x, y, c و s معلوم اند و x^* و y^* را باید پیدا کنیم. معادله ها را ساده می کنیم. اگر در معادله های (۶) و (۷)، پرانتزها را باز کنیم، به معادله های زیر می رسیم:

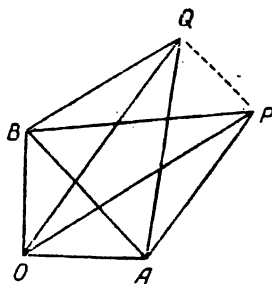
$$x^*c + y^*s = x \quad (8)$$

$$-x^*s + y^*c = y \quad (9)$$

که اگر آن ها را، با استفاده از برابری $c^2 + s^2 = 1$ ، حل کنیم، به دست می آید:

$$\begin{cases} x^* = cx - sy \\ y^* = sx + cy \end{cases} \quad (10)$$

اکنون باید تحقیق کنیم که جواب (۱۰)، در هر سه معادله (۵)، (۶) و (۷) صدق می کنند. و چقدر موجب خوشحالی است که، در واقع، جواب با هر سه معادله سازگار است. ولی این، همه مطلب نیست. تحقیق در معادله های (۵)، (۶) و (۷) ثابت می کند که، فاصله هر نقطه، تا نقطه های O, A و B ، ثابت می ماند. ولی، جای يك اعتراض باقی می ماند. فرض کنیم، تبدیل (۱۰) را در مورد دو نقطه انجام داده باشیم: P با مختصات (x_1, y_1) و Q با مختصات (x_2, y_2) . محاسبه هایی که تا این جا انجام داده ایم، از يك طرف بی تغییری فاصله های OA ، AP و BP ، و از طرف دیگر، بی تغییری فاصله های OQ ، AQ و BQ را تضمین می کند، ولی هیچ چیز درباره فاصله PQ - که روی شکل ۷۹، به صورت نقطه چین داده شده است - نمی گوید. اگر تجربه ما، همه تردیدها را درباره برابری PO و P^*Q^* برطرف می کند، برای کسی که این تجربه را ندارد، نمی تواند چندان روشن باشد. برای این که مطلب را برای چنین کسی روشن کنیم، باید P^*Q^* را محاسبه کنیم و نشان دهیم که، در واقع، با PQ برابر است.



شکل ۷۹

شبه جواب a ، جواب b هم ، منجر به ایزومتری ، و با معادله های زیر معین می شود :

$$\begin{cases} x^* = cx + sy \\ y^* = sx - cy \end{cases} \quad (11)$$

به سادگی معلوم می شود که (۱۰) و (۱۱) ، تبدیلهای خطی هستند. براساس همه این محاسبه های جبری ، می توانیم نتیجه های زیر را تنظیم کنیم : قضیه ۷. مجموعه ای نامتناهی از ایزومتری ها وجود دارد ، که مبداء مختصات را ثابت (بی تغییر) نگه می دارد. دو نوع ایزومتری تشخیص داده می شود: نوع اول بامعادله های (۱۰) ، و نوع دوم بامعادله های (۱۱) تشخیص داده می شود.

قضیه ۸. هرایزومتری نسبت به مبداء مختصات ، به وسیله یک تبدیل خطی داده می شود.

دوران و انعکاس

اختلاف عمده بین این دو نوع را می توان ، به روشنی ، روی شکل ۷۷ مشاهده کرد. ولی «موجود فرضی» ما نمی تواند این شکل را ببیند و ، بنابراین ، وقتی که از «برگرداندن» شکل - که ضمن انعکاس پیش می آید - صحبت می کنیم ، منظور ما را نمی فهمد. آیا می توان ، به نحوی ، این تصور را به او داد؟ در فصل های چهارم و پنجم ، وقتی که از تبدیلهای خطی صحبت می کردیم ، پرسش خوبی مطرح کردیم: «بردار خاص ، یعنی چه؟» معادله

مفسری که، به کمک آن، به این پرسش پاسخ دادیم، در این جا هم می تواند ما را یاری دهد.

از آن جا که دوران، معمولاً، جهت بردار را تغییر می دهد، نمی توانیم امیدوار باشیم که، برای آن، بردارهای خاصی پیدا کنیم. اگر ماتریس

$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ را، که متناظر با معادله های (۱۰) است، R بنامیم، آن وقت،

معادله مفسر نسبت به R ، به این صورت درمی آید:

$$R^2 - 2cR + (c^2 + s^2)I = 0$$

که ریشه های آن عبارتند از $(i = \sqrt{-1})c \pm is$. به استثنای حالت $s = 0$ که متناظر با دوران به اندازه ۰ یا ۱۸۰ درجه است - این ریشه ها، مختلط اند و، بنابراین، حدس ما در این مورد که، ضمن دوران، حتی یک بردار حقیقی هم وجود ندارد که جهت خود را تغییر ندهد، تأیید می شود. با وجود این، اگر در حوزه عددهای مختلط بحث کنیم، به نتیجه نامنتظری می رسیم: همه دوران ها، دارای بردارهای خاص مشابه (i, I) و $(-i, I)$ هستند.

ولی، در مورد تبدیلی که با جواب b معین می شود، وضع به این گونه نیست. اگر ماتریس $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ را، که متناظر با معادله های (۱۱) می باشد، M بنامیم، برای معادله مفسر آن به دست می آید: $M^2 = I$ ، که تا حدی آن را، در فصل پنجم، مطالعه کرده ایم. در آن جا روشن کردیم که، برای هر بردار v از تبدیل M ، عبارت $(I + M)v$ ثابت می ماند و عبارت

$\frac{1}{4}(I - M)v$ در -1 ضرب می شود. اگر به عنوان v ، بردار $(0, 2k)$ را

انتخاب کنیم، می بینیم که، تبدیل M ، هر بردار به صورت $(s, 1+c)k$ را بی تغییر نگه می دارد و هر بردار به صورت $(-s, 1-c)k$ را در -1 ضرب می کند. بردارهای به صورت $(s, 1+c)k$ (که شاید بهتر باشد،

۱. این، شبیه بحثی است که در فصل دوم کتاب «رودوی به ریاضیات»، بخش «برخورد دایره ها، در خط راست بی نهایت دور» شده است.

آن‌ها را نقطه بنامیم)، خطراست معینی را پر می‌کنند که از مبدا مختصات می‌گذرد. تبدیل M ، درواقع، عبارت است از انعکاس نسبت به این خطراست. بنابراین، اختلاف بین دوران و انعکاس را، می‌توان به این ترتیب، تعریف کرد: در دوران، تنها يك نقطه بی‌تغییر می‌ماند، در حالی که در انعکاس، هریک از نقطه‌های يك خطراست بی‌تغییرند^۱. این اختلاف، از نوع مفهوم‌هایی است که برای «موجود خیالی» ما قابل درک است.

این «موجود» قادراست، روش‌های مختلف ترکیب دوران‌ها و انعکاس‌ها را هم‌بفهمد. اگر دورانی به دنبال دورانی دیگر انجام گیرد، منجر به يك دوران می‌شود. دوران‌ها، درواقع، يك گروه را تشکیل می‌دهند. ولی، انعکاس‌ها، تشکیل گروه نمی‌دهند: دوانعکاس، منجر به يك دوران می‌شود و نه يك انعکاس. ما می‌توانیم این نتیجه‌ها را، به طریق هندسی، مشاهده کنیم، ولی «موجود خیالی» می‌تواند، آن‌ها را، از ضرب ماتریس‌ها نتیجه بگیرد. اگر داشته باشیم:

$$R_1 = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \text{ و } R_2 = \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix}$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$R_1 R_2 = \begin{pmatrix} cC - sS & -cS - sC \\ sC + cS & cC - sS \end{pmatrix}$$

که می‌توان آن را به صورت $\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$ نوشت، که در آن، $p = cC - sS$ و $q = sC + cS$ ، و پاسخ گوی يك دوران است. برای حصول اطمینان از دوران بودن $R_1 R_2$ ، باید ثابت کنیم: $p^2 + q^2 = 1$. قبل از همه، قانع می‌شویم که

$$p^2 + q^2 = (c^2 + s^2)(C^2 + S^2)$$

و این، به معنای آن است که: $p^2 + q^2 = 1$ ؛ زیرا، دوران بودن R_1 و R_2

۱. حرف‌های R و M ، برای تبدیل‌هایی انتخاب شده است که متناظر با حرف‌های اول واژه‌های انگلیسی «rotation» و «mirror» هستند و می‌توان آن‌ها را در زبان فارسی به صورت «دوران» و «انعکاس آئینه‌ای» یا «تقارن» ترجمه کرد. ۲.

به معنای آن است که $c^2 + s^2 = 1$ و $C^2 + S^2 = 1$. حالا می فهمیم که چرا، به عنوان مختصات نقطه A ، از حرف های c و s استفاده کردیم، که حرف های اول واژه های کسینوس (cosinus) و سینوس (sinus) هستند. از این موقعیت که، نقطه $A^*(c, s)$ ، جای تازۀ نقطه $(0, 1)$ و در نتیجه دوران آن به دست آمده است، می توان برای تعریف سینوس و کسینوس هر زاویه، و البته در ابتدا برای زاویه های بین 0 تا 90 درجه، استفاده کرد. یادآوری می کنیم که، برابری های $p = cC - sS$ و $q = sC + cS$ ، معرف دستورهای جمع، برای سینوس و کسینوس هستند. و جالب این جاست که، بدون این که حتی يك کلمه از مثلثات صحبت کرده باشیم، توانسته ایم تا حد زیادی در آن نفوذ کنیم.

تمرین

۱. انعکاس های $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ و $M_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$ مفروض اند، که در آن ها، $a^2 + b^2 = 1$ و $A^2 + B^2 = 1$. تحقیق کنید که $M_1 M_2$ يك دوران است.

۲. می دانیم: $X = M_1 M_2$ و $Y = M_2 M_1$. آیا X و Y برابرند؟ اگر برابر نیستند، آیا می توان رابطه ساده ای بین آن ها پیدا کرد؟

۳. R_1 را دورانی می گیریم که، به مفهوم متن، تعریف شده باشد؛ نوع تبدیل $R_1 M_1$ را پیدا کنید.

تعمیم

در فضای دوبعدی توانستیم، به کمک جبر مقدماتی، همه انواع ممکن ایزومتري را، نسبت به مبدا مختصات، بیان کنیم. روشن است که، اگر بخواهیم به فضاهای سه بعدی، چهار بعدی، پنج بعدی و یا فضاهای با بعدهای بیشتر پردازیم، ماهیت بحث تغییر نمی کند و تنها حجم محاسبه ها زیادتر می شود. بنابراین، بهتر است تجربه خود را در هندسه دوبعدی مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم و آن چه را که، برای حل مسأله کلی در فضای n بعدی

لازم است، از آن جدا کنیم.

در فضای دوبعدی، محاسبه‌ها ساده‌تر از آن چه انتظار داشتیم، از آب درآمد. همه شرط‌هایی که باید در دوران صدق کنند، با معادله‌های درجه دوم (۱)، (۲)، (۳)، (۵)، (۶) و (۷) بیان شدند. تبدیل‌هایی که به صورت معادله‌های (۱۰) و (۱۱) پیدا شد، خطی بودند. نتیجه آخر را چگونه به دست آوردیم؟

نخستین معادله غیر درجه دومی که دوران را مشخص می‌کرد، معادله (۴) بود. سمت چپ معادله (۳) عبارت بود از $(A^*B^*)^2$ و برابر بود با $(p-c)^2 + (q-s)^2$. با باز کردن آن، معلوم شد که شامل عبارت $p^2 + q^2$ یا همان $(OB^*)^2$ و عبارت $c^2 + s^2$ یا $(OA^*)^2$ است. بعد از به حساب آوردن این مطلب و ساده کردن عبارت‌ها، به معادله (۴) رسیدیم. این روش به دست آوردن معادله (۴)، باروش زیرهم ارزاست: معادله‌های (۱) و (۲) را جمع و معادله (۳) از نتیجه جمع، کم و سپس، نتیجه حاصل را بر ۲ تقسیم کنید. اگر معادله‌های (۱)، (۲) و (۳) را به صورت

$$(OA^*)^2 = OA^2, (OB^*)^2 = OB^2, (A^*B^*)^2 = AB^2$$

بنویسیم و همان کارها را در مورد آن‌ها انجام دهیم، به همان معادله (۴)، منتهی به صورت هندسی آن، می‌رسیم:

$$\frac{1}{4} [(OA^*)^2 + (OB^*)^2 - (A^*B^*)^2] = \frac{1}{4} [OA^2 + OB^2 - AB^2]$$

این معادله تأکید می‌کند که مقدار $(OA^2 + OB^2 - AB^2)$ تغییر نمی‌کند.

این تأکید، از نظر هندسی بغرنج‌تر از تأکیدی است که معادله‌های (۱)، (۲) و (۳) از نظر جبری داشتند.

همین شیوه بررسی را در مورد فضای سه بعدی تعمیم می‌دهیم و روشن می‌کنیم که به چه نتیجه‌ای می‌رسد. دو نقطه $P(x_1, y_1, z_1)$ و $Q(x_2, y_2, z_2)$ را در نظر می‌گیریم. چون در ایزومتر، فاصله بین نقطه‌ها بی‌تغییر می‌ماند، مقدار $(OP^2 + OQ^2 - PQ^2)$ هم، همان مقدار سابق خود باقی

می‌ماند. این عبارت ، با اصطلاح‌های جبری، به چه صورت در می‌آید ؟
می‌دانیم:

$$OP^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad OQ^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

و بنابراین

$$\frac{1}{4}(OP^2 + OQ^2 - PQ^2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

یعنی، در هر حرکت نسبت به مبدا مختصات، مقدار $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ ، برای هردو نقطه دلخواه، تغییر نمی‌کند. بحث را «برمی‌گردانیم»: اگر حرکت مفروض، مقدارهای OP ، OQ و $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ را تغییر ندهد، آن وقت، همان‌طور که از معادله اخیر نتیجه می‌شود، مقدار PQ را هم تغییر نمی‌دهد. در آغاز به نظر می‌رسد که دو نوع شرط به دست آمده است: یکی جبری و دیگری هندسی، که شامل طول‌های OP و OQ هستند. ولی، می‌توان به سادگی متوجه شد که، شرط دوم، حالت خاصی است از شرط اول. در واقع

$$OP^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

و وقتی که عبارت سمت راست را به صورت $x_1 x_1 + y_1 y_1 + z_1 z_1$ بنویسیم به معنای آن است که در عبارت $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ ، دو نقطه (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) را منطبق برهم گرفته‌ایم. همین مطلب را درباره OQ هم می‌توان گفت.

به این ترتیب، نتیجه می‌شود که، شرط ایزومتری حاکی از آن است که، مقدار $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ ، برای هردو نقطه (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) ، خواه مختلف باشند یا منطبق برهم، بی‌تغییر باشد.

حاصل ضرب اسکالر

عبارت $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ ، آن قدر در ریاضیات اهمیت دارد که نام خاصی بر آن نهاده‌اند: حاصل ضرب اسکالر دو بردار P و Q . گاهی آن

را به صورت $P.Q$ می نویسند و «حاصل ضرب نقطه‌ای»^۱ می نامند. قرار می گذاریم که آن را به صورت (P, Q) بنویسیم. در مکانیک، و مثلاً^۲ وقتی که بخواهیم کار نیروی OP را در مسیر OQ محاسبه کنیم، به حاصل ضرب اسکالر برمی خوریم. حالت خاصی وجود دارد که، در مورد آن، مفهوم هندسی حاصل ضرب اسکالر روشن است. دیدیم که حاصل ضرب اسکالر (P, Q) ، از عبارت $\frac{1}{4}(OP^2 + OQ^2 - PQ^2)$ به دست آمد. قضیه فیثاغورث حکم می کند که، اگر مثلث POQ قائم الزاویه باشد، این عبارت برابر صفر می شود، یعنی $(P, Q) = 0$.

ما از این نتیجه، در جهت عکس آن استفاده می کنیم: عمود بودن OP و OQ را، می توان از برابری $(P, Q) = 0$ نتیجه گرفت به چه مناسبت، این عبارت را، «حاصل ضرب» می نامند؟ به این دلیل ساده که، بسیاری از ویژگی های آن، که به کمک تعریف جبری حاصل ضرب اسکالر قابل تحقیق اند، ویژگی های ضرب را به خاطر می آورند. مثلاً $(kP, Q) = k(P, Q)$ ، انجام بسیاری از عمل های جبری را، روی حاصل ضرب های برداری، به وجود می آورند. مثلاً، $(A+B, C+D)$ را می توان به صورت

$$(A, C) + (A, D) + (B, C) + (B, D)$$

باز کرد و یا دستور تفاضل مربع ها را به دست آورد:

$$(A+B, A-B) = (A, A) - (B, B)$$

ولی، باید یادآوری کرد که، این دستگاه، با شرط ۶ فصل هفتم سازگار نیست. حاصل ضرب برداری را، به عنوان يك عدد كاملاً^۳ معین تعریف کردیم، نه به عنوان بردار (x, y, z) . بنابراین، در این جا، با حلقه سروکار نداریم. در حلقه، عبارت به صورت $ab+c$ معنا دارد، در حالی که $(P, Q) + R$ هیچ معنایی ندارد، زیرا به معنای اضافه کردن عدد به بردار است.

۱. در ادبیات ریاضی فارسی، چنین اصطلاحی نداریم.

تغییر محورها

از حاصل ضرب برداری، می‌توان، برای عبور از یک دستگاه محوره‌های قائم، به دستگاه محوره‌های قائم دیگر، استفاده کرد. سه بردار دوبه‌دو عمود برهم P ، Q و R را در نظر می‌گیریم. تصمیم داریم از آن‌ها، به عنوان محورها استفاده کنیم، یعنی می‌خواهیم برداری مثل V را به صورت $aP + bQ + cR$ بیان کنیم. فرض می‌کنیم، بردارهای P ، Q ، R و V ، به صورت مختصاتی (x, y, z) بیان می‌شوند، به نحوی که، اگر لازم باشد، می‌توان هر حاصل ضرب برداری را محاسبه کرد. مثلاً، برای جست‌وجوی عدد a ، کافی است حاصل ضرب برداری (P, V) را تشکیل دهیم. چون

$$V = aP + bQ + cR$$

بنابراین

$(P, V) = (P, aP + bQ + cR) = a(P, P) + b(P, Q) + c(P, R)$
از آن جا که P ، Q و R دو به دو برهم عمودند، بنابراین $(P, Q) = 0$ و $(P, R) = 0$. در نتیجه: $(P, V) = a(P, P)$ ، که a به سادگی از آن جا به دست می‌آید.

برای این که سادگی این روش را احساس کنیم، کافی است مثالی را در نظر بگیریم. فرض کنید، بردارهای

$$P = (1, 1, 1); Q = (1, 2, -3); R = (-5, 4, 1)$$

دوبه‌دو برهم عمود باشند (این مطلب را می‌توان به کمک محاسبه حاصل ضرب اسکالر آن‌ها، تحقیق کرد). هر بردار فضای سه بعدی را می‌توان، روی محورهایی که با این بردارها مشخص می‌شوند، تجزیه کرد. فرض کنیم که می‌خواهیم، این عمل را، با بردار $V = (10, 4, -8)$ انجام دهیم. در این صورت داریم: $(P, V) = 6$ ، $(P, P) = 3$ و معادله قبلی $(P, V) = a(P, P)$ ، به صورت $6 = 3a$ در می‌آید، و از آن جا: $a = 2$. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد:

$$(Q, V) = b(Q, Q) \text{ و } (R, V) = c(R, R)$$

که در مسأله ما، منجر به معادله‌های $42 = 14b$ و $42 = 42c$ — می‌شوند

و، از آنجا، به دست می‌آید: $b=3$ و $c=-1$ ؛ و در نتیجه:
 $V=2P+3Q-R$. درستی این نتیجه‌گیری را، می‌توان به‌سادگی مورد
 تحقیق قرار داد.

تمرین

۱. بردار $V=(7,7,7)$ را روی بردارهای $P=(-2,3,6)$ ،
 $Q=(6,-2,3)$ و $R=(3,6,-2)$ تجزیه کنید.
۲. بردار $V=(6,1,4)$ را روی بردارهای $P=(1,0,-1)$ ،
 $Q=(1,2,1)$ و $R=(1,-1,1)$ تجزیه کنید.

حرکت در فضای سه بعدی

با مراجعه به‌روش جست‌وجوی ایزومتري در فضای دوبعدی، به‌یاد
 می‌آوریم که، بحث ما، به دو بخش تقسیم می‌شود. در بخش اول، بحث ما
 تنها برسر این بود که، برای نقطه‌های A و B — که برمحورها قرار دارند،
 چه پیش می‌آید. OA و OB برهم عمود بودند و طول‌هایی برابر واحد
 داشتند. طبیعی است که، ایزومتري، این ویژگی‌ها را تغییر نمی‌دهد، بنابراین،
 OA^* و OB^* هم، بردارهای واحد و عمود برهم، خواهند بود. این شرط‌ها،
 با برابری‌های (۱)، (۲) و (۴) بیان می‌شوند، و جواب‌های a و b ، همه
 حالت‌های استقرار متقابل آن‌ها را دربر می‌گیرند.

بخش دوم، که بخش نهائی بررسی است، مشروط به‌هیچ محدودیت
 اضافی نبود. همین که نقطه‌های A^* و B^* را — که A و B به‌آن‌جا می‌روند —
 پیدا کردیم، و توانستیم جای هر نقطه دیگری را، که با شرط‌های مسأله
 سازگار بود، تعیین کنیم. ضمناً، تبدیل حاصل، خطی بود: به‌ازای $A \rightarrow A^*$
 و $B \rightarrow B^*$ ، نگاشت $xA+yB \rightarrow xA^*+yB^*$ ، شرط ایزومتري را تأمین
 می‌کرد.

روشن است که، در فضای سه بعدی، باید از بررسی نقطه‌های A ، B
 و C آغاز کنیم، که در آن

$$A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$$

ضمناً، OA ، OB و OC ، بردارهای واحد و دو به دو برهم عمودند، که از نظر جبری، به این صورت بیان می‌شود:

$(A, A) = (B, B) = (C, C) = 1$; $(A, B) = (B, C) = (A, C) = 0$
از آن جا که، ایزومتري، حاصل ضرب اسکالر را تغییر نمی‌دهد، بنابراین، نقطه‌های A ، B و C ، تنها می‌توانند به نقطه‌های A^* ، B^* و C^* بروند که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$(A^*, A^*) = (B^*, B^*) = (C^*, C^*) = 1,$$

$$(A^*, B^*) = (B^*, C^*) = (A^*, C^*) = 0$$

و این به معنای آن است که OA^* ، OB^* و OC^* هم، بردارهایی واحد و دو به دو برهم عمودند، چیزی که از تصور هندسی آن‌ها هم، نتیجه می‌شود. فرض می‌کنیم، نقطه‌های A^* ، B^* و C^* را، که با این شرط‌ها سازگارند، پیدا کرده باشیم. آیا، تبدیل خطی

$$xA + yB + zC \rightarrow xA^* + yB^* + zC^*$$

که با تبدیل $A \rightarrow A^*$ ، $B \rightarrow B^*$ ، $C \rightarrow C^*$ معین می‌شود، ایزومتري است؟ قبلاً گفتیم که تبدیل، وقتی ایزومتري است که مقدار هر حاصل ضرب اسکالر را، بی‌تغییر نگه‌دارد. بنابراین، ببینیم که اگر داشته باشیم:

$$P = x_1 A + y_1 B + z_1 C = (x_1, y_1, z_1),$$

$$Q = x_2 A + y_2 B + z_2 C = (x_2, y_2, z_2)$$

چه برسر (P, Q) می‌آید؟ با استفاده از ویژگی‌های جبری حاصل ضرب اسکالر، تلاش می‌کنیم

$$(P^*, Q^*) = (x_1 A^* + y_1 B^* + z_1 C^*, x_2 A^* + y_2 B^* + z_2 C^*)$$

را پیدا کنیم. وقتی که ضرب اسکالر را انجام دهیم، به عبارتی شامل ۹ جمله می‌رسیم که این طور آغاز می‌شود:

$$x_1 x_2 (A^*, A^*) + x_1 y_2 (A^*, B^*) + \dots$$

می‌بینیم که کار مشکلی در پیش نداریم، زیرا $(A, A^*) = 1$ و $(A^*, B^*) = 0$. در واقع، از ۹ جمله، ۶ جمله برابر صفر می‌شود و، برای سه جمله دیگر، باید از ویژگی $(A, A^*) = 1$ و مشابه‌های آن، استفاده کنیم. در نتیجه،

بعد از ساده کردن عبارت، به مجموع حاصل ضرب‌های آشنای $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ می‌رسیم که همان حاصل ضرب اسکالر (P, Q) است، به این ترتیب، تبدیل خطی، در واقع، همه حاصل ضرب‌های اسکالر را ثابت نگه می‌دارد و، بنابراین، يك ایزومتري است: به سادگی می‌توان کار را با اثبات این مطلب تمام کرد که: ایزومتري عبارت است از يك تبدیل خطی. ولی، ما به این اثبات نمی‌پردازیم.

این بحث را، برای حالتی که با هر تعداد دلخواه، ولی محدود، بعد سروکار داشته باشیم، می‌توان به کاربرد. وقتی که، مثلاً، با پنج بعد سروکار داریم، تنها حجم کار ما زیاد می‌شود، زیرا به جای سه بردار A, B, C ، باید از پنج بردار A, B, C, D, E استفاده کنیم.

حاصل ضرب برداری، در نظریه فضای هیلبرتی، نقشی اساسی به عهده دارند. این فضا، تعمیمی از هندسه اقلیدسی، برای بی‌نهایت بعد است.

یادداشتی درباره منطق

باید با يك دستگیره منطقی، آنچه را که، احتمالاً، در این فصل مبهم مانده است، روشن کرد. برای سادگی کار، این بحث را با اصطلاح‌های فضای دوبعدی انجام می‌دهیم، و این، تغییری در ماهیت کار ایجاد نمی‌کند. در این فصل، نقطه را به وسیله مختصات (x, y) تعریف کردیم و بحث خود را، آزادانه، بر اساس اندیشه‌های دو فصل اول و دوم طرح ریختیم. بردارها را با هم جمع و، آن‌ها را، در عدد ضرب کردیم. به این مفهوم، می‌توانستیم، مستقیماً درباره پاره خط OA ، به عنوان مجموعه همه نقطه‌های tA صحبت کنیم، که در آن $0 \leq t \leq 1$. چون نقطه A به مختصات $(1, 0)$ است، بنابراین، پاره خط OA ، به معنای همه نقطه‌های با مختصات $(t, 0)$ می‌شود.

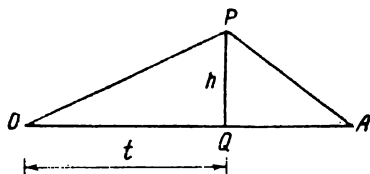
ولی، در فصل حاضر، تعریف دیگری برای پاره خط OA می‌دهیم. بنابر تعریف ۲، که مفهوم فاصله را به ما می‌داد، می‌توانیم پاره خط OA را، به عنوان کوتاه‌ترین راه از O تا A ، تعریف کنیم.

آیا این دو تعریف با هم سازگارند؟ تجربه هندسی، پاسخ مثبت را به ما تلقین می‌کند. ولی این، نیاز به استدلال و اثبات دارد. توافق ما باید مقید به دستوری باشد که در تعریف ۲ آورده‌ایم، چه بسا که با دستورهای دیگر، نتوان به آن رسید. مثلاً، يك کاغذ شطرنجی را در نظر بگیرید که، مختصات نقطه‌های واقع بر آن، به وسیله حروف‌های x و y داده شده باشد. بنابراین تعریف ۱، هر نقطه به وسیله دو عدد (x, y) مشخص می‌شود، فرض کنید، نقشه جهان را روی این صفحه رسم کرده باشیم و بخواهیم فاصله بین دو نقطه آن را معین کنیم تا، به کمک آن، بتوانیم فاصله اصلی بین آن‌ها را، در روی سطح زمین به دست آوریم. L و D را در روی نقشه، نماینده شهرهای لندن و دهلی می‌گیریم. اگر L و D را با خط کش به هم وصل کنیم، پاره خط راست LD به دست می‌آید که با عبارت $(1-t)L + tD$ بیان می‌شود (فصل‌های اول و دوم را ببینید)، و معرف «جاده مستقیم» بین L و D است. وقتی که هواپیما، فاصله بین لندن و دهلی را، در کوتاه‌ترین مسیر خود، طی می‌کند، راهی غیر از آن چه را که روی نقشه به صورت منحنی دیده می‌شود، انتخاب می‌کند. بنابراین روش برداری و روش از موضع فاصله، منجر به دو تعریف مختلف برای خط راست می‌شوند.

ولی اگر از تعریف ۲ آغاز کنیم، به این دشواری بر نمی‌خوریم. ثابت می‌کنیم که کوتاه‌ترین فاصله از O تا A ، با تعریف پاره خط راست به روش برداری، سازگار است.

در واقع، می‌خواهیم از بین همه منحنی‌های هموار، که نقطه‌های A و O را به هم وصل می‌کنند، آن را پیدا کنیم که کوتاه‌ترین طول را داشته باشد. جست و جوی این منحنی، مسأله جالبی از ریاضیات را تشکیل می‌دهد که با محاسبه واریاسیونی حل می‌شود، نوع محاسبه‌ای که کمتر شناخته شده است و، به همین مناسبت، ممکن است موجب دشواری‌هایی بشود. برای این که از کنار این دشواری عبور کنیم، بحث خود را به ترتیب زیر انجام می‌دهیم. اگر نقطه P را در بیرون خط راست مسیر O تا A ، و نقطه Q را روی این خط راست انتخاب کنیم، می‌توان انتظار داشت که، مجموع فاصله‌های

OP و PA بزرگتر از OA ، و مجموع فاصله‌های OQ و QA ، برابر OA در آیند. روی شکل ۸۰، نقطه O را میداد محاسبه و نقطه‌های A ، Q و P را، به ترتیب، بامختصات $(0, 1)$ ، $(t, 0)$ و (t, h) گرفته‌ایم. با فرض $0 < t < 1$ و استفاده از تعریف ۲، فاصله‌های OA ، OQ ، QA ، OP ، PA را محاسبه می‌کنیم و به دست می‌آوریم $OQ = t$ و $QA = 1 - t$. چون $OA = 1$ ، بنابراین $OQ + QA = OA$. و این، حدس ما را تأیید می‌کند که، نقطه Q در واقع هم، روی خط راست مسیر از O به A قرار دارد.



شکل ۸۰

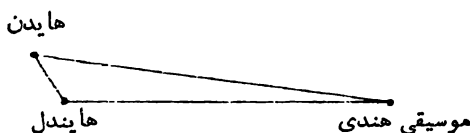
اما، در مورد نقطه P ، وضع به گونه دیگری است. چون داریم: $OP = \sqrt{t^2 + h^2}$ ، بنابراین روشن است که از t بزرگتر است؛ همچنین $PA = \sqrt{(1-t)^2 + h^2}$ از $1-t$ بزرگتر است (همان‌طور که در شکل ۸۰ دیده می‌شود، فرض ما بر این است که $h \neq 0$). در نتیجه، $OP + PA$ بزرگتر از $t + (1-t)$ ، یعنی بزرگتر از ۱ خواهد بود. و این، دوباره با عقیده مامبنی بر این که P بر کوتاه‌ترین مسیر از O به A واقع نیست تطبیق می‌کند؛ علاوه بر آن، این امر به ما زمزمه می‌کند که تعریف مسیر مستقیم را می‌توان بر اساس اندیشه فاصله ساخت، زیرا ما را به همان مفهومی از پاره خط راست می‌رساند که با روش برداری در اختیار داشتیم.

روشن است که ما نمی‌توانیم خود را به این حالت خاص و ساده نقطه‌های O و A محدود کنیم، بلکه باید این نتیجه را، برای هر دو نقطه دلخواه، ثابت کنیم. این، یک تمرین کوچک، ولی جالب جبری را تشکیل می‌دهد که می‌توان، آن را، به صورت زیر تنظیم کرد: می‌خواهیم ثابت کنیم که، برای هر دو نقطه دلخواه H و K ؛ به شرطی که نقطه P به صورت $H(1-t) + tK$ نباشد

($0 \leq t \leq 1$)، مجموع فاصله‌های HP و PK از فاصله HK بزرگتر است. برای سادگی اثبات، باید از این حقیقت استفاده کرد که، انتقال و دوران، فاصله را تغییر نمی‌دهند. ابتدا، شبیه آن چه برای OA انجام دادیم، ثابت می‌کنیم هر بخش محور Ox ، کوتاه‌ترین مسیر است. از آن جا که، کوتاه‌ترین مسیر، در نتیجه دوران و، به دنبال آن، انتقال، باز هم منجر به کوتاه‌ترین مسیر می‌شود، بنابراین، تعریف کوتاه خط راست، چنین می‌شود: خط راست، عبارت است از چیزی که می‌تواند از محور Ox ، به کمک دوران و انتقال‌های موازی، به دست آید. خیلی ساده می‌توان تحقیق کرد که، این تعریف، با تعریف‌هایی که در فصل دوم و سوم برای خط راست مورد استفاده قرار داده‌ایم، سازگار است.

فضاهای متری و باناخی

ریاضیات، اغلب از کنایه و استعاره، به عنوان وسیله‌ای استفاده می‌کند. يك اصطلاح مجازی زندگی روزانه، وارد ریاضیات می‌شود و مفهومی دقیق و منطقی پیدا می‌کند. در باره استعاره فاصله هم، همین وضع پیش آمده است. این مفهوم، از ذهن همه ما گذشته است. می‌گوییم، شرکت به ورشکستگی نزدیک شده است. اغلب ژنرال‌های بدطالع، گمان می‌کنند که استراتژی و تاکتیک آن‌ها، به استراتژی و تاکتیک ناپلئونی، نزدیک بوده است. شایعه، ممکن است، از حقیقت دور باشد. می‌گوییم هایندل (*Händel*) و هایدن (*Haydn*) به هم نزدیک‌اند، ولی از موسیقی هندی و یا راک اندرول دورند. این خود، مسأله‌ای جالب است که بتوانیم معلوم کنیم، چه حقیقت‌هایی



شکل ۸۱

هارمونی، ریتم و یا چیزهای دیگری - موجب شده‌اند تا نزدیکی یا دوری دونوع موسیقی را تشخیص دهیم. می‌توان طرح بزرگی، باخصلت هندسی، تنظیم و همه انواع موسیقی‌ها را گروه‌بندی کرد و، مثلاً، به چنین قضیه‌ای رسید: هایدن به هایندل نزدیک است، هایندل از موسیقی هندی دور است، بنابراین هایدن هم از موسیقی هندی دور است (شکل ۸۱).
در همه این مثال‌ها، صحبت بر سرفاصله بین چیزهایی است که، به اندازه

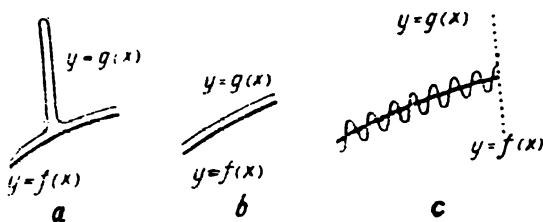
کافی، بفرنج‌اند: موقعیت شرکت، روش‌هدایت جنگ، شیوه کار آهنگ‌سازان این چیزها را، می‌توان بانقطه نشان داد، شبیه آنچه در شکل ۸۱ می‌بینید. در نظریه ریاضی فضاهای متری، می‌توان هر نقطه فضا را به موضوع بفرنج و مرتبگی نسبت داد. نقطه می‌تواند به معنای بردار، ماتریس، منحنی، تابع یا عمل (مثلاً، انتگرال‌گیری) باشد. کوشش خواهیم کرد، روش دقیقی برای تعریف فاصله، مثلاً بین دو ماتریس یا بین هر دو موضوع از طبقه‌ای دیگر، پیدا کنیم.

مجموعه موضوع‌هایی را که بتوان، در مورد آن‌ها، تعریف قابل‌قبولی برای فاصله پیدا کرد، فضای متری نامیده می‌شود. در زیر روشن می‌کنیم که منظور ما از واژه «قابل قبول» چیست.

ممکن است روش‌های مختلفی برای جا دادن موضوع‌ها، در یک مجموعه، وجود داشته باشد و، ضمناً، همه آن‌ها با معنی باشند. موقعیت موسیقی‌دان‌ها را، برحسب شیوه آهنگ‌سازی آن‌ها، مشخص کردیم. ولی تاجر، ممکن است آن‌ها را، برحسب درآمدهایشان، تقسیم‌بندی کند، در این صورت، جای آن‌ها را روی یک خط راست تنظیم می‌کند، به نحوی که، آن که درآمد بیشتری دارد به یکی از دو انتها و آن که درآمد کمتری دارد، به انتهای دیگر خط راست نزدیکتر می‌شود. کس دیگری ممکن است علاقه‌مند باشد، موسیقی‌دان‌ها را، به صورت جغرافیایی، و برحسب محل تولد آن‌ها، تقسیم‌بندی کند، که، در این صورت، باید از سطح یک کره مصنوعی استفاده کند.

این سه نوع تقسیم‌بندی، به سه نوع مختلف فضاهای متری تعلق دارند، با وجودی که همه آن‌ها، از یک نوع «ماده اولیه» یعنی موسیقی‌دانان، تشکیل شده‌اند. موضوع این است که: هندسه موضوع‌هایی که روی یک خط راست مستقر شده باشند، با هندسه همان موضوع‌ها در روی کره مصنوعی، باهم فرق دارند. در ریاضیات، بیش از همه، به وضع استقرار موضوع‌ها علاقه‌مندیم، یعنی به آنچه که وضع آن‌ها را نسبت به یکدیگر روشن می‌کند، و کم و بیش، نسبت به ماهیت و شخصیت موضوع‌ها بی‌تفاوت می‌مانیم. برای

بدهیم. اشاره به این گونه استقرارها، می توان از نشانه گذاری های کوتاهی استفاده کرد. مثلاً، وضع استقرار موسیقی دانان را، در حالت اول، می توان به صورت $S(M, c)$ نشان داد، که در آن، S به معنای فضایی است که در باره آن صحبت می کنیم؛ M ، نقطه ای که موسیقی دانان را مشخص می کند، و c ، فاصله ای که، در اصطلاح های مربوط به شیوه های آهنگ سازی، تعریف شده است. حالت دوم وضع استقرار موسیقی دانان را برخط راست، در رابطه با وضع مالی آن ها، می توان به صورت $S(M, f)$ نشان داد و بالاخره، حالت سوم را، به صورت $S(M, g)$ ، زیرا در این حالت، فاصله بین موسیقی دانان، مفهوم جغرافیایی دارد^۱. این سه نوع تقسیم بندی موسیقی دانان، سه هدف مختلف را دنبال می کنند. این هدف ها، نقش اساسی، در حل مسأله مربوط به تعیین فاصله بین موضوع ها، به عهده دارند. در هر مجموعه، بسته به هدفی که دنبال می کنیم، می توان از تعریف های مختلفی برای فاصله استفاده کرد. در هر یک از نمودارهای a ، b ، c ، در شکل ۸۲، دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را می بینیم. می پرسیم: آیا می شود منحنی های هرزوج را همچون منحنی های نزدیک مورد بررسی قرار داد یا نه؟



شکل ۸۲

آیا $y = f(x)$ ، تقریب خوبی برای $y = g(x)$ است؟ در هر کدام از این حالت ها، بسته به شرایطی که حاکم باشد، می توانیم به این پرسش ها، پاسخ مثبت

۱. مؤلف، در این نام گذاری ها، به ترتیب، از حرف های اول واژه های انگلیسی «composition»، «finances» و «geography»، یعنی از c ، f و g استفاده کرده است.م.

بدهیم. اگر معیار نزدیکی منحنی‌ها را، مقدار مساحت زیر آن‌ها بگیریم، آن وقت، در هر سه حالت، می‌توانیم منحنی‌ها را نزدیک به هم به حساب آوریم، زیرا اختلاف مساحت‌های متناظر آن‌ها، در هر سه حالت، مقداری ناچیز است. ولی، ممکن است بخواهیم جدولی تشکیل دهیم (مثلاً جدول مقدارهای تابع، در نقطه‌های معین) و، به وسیله آن، تضمین کنیم که اشتباه هر مقدار از عدد کوچک مفروضی، تجاوز نمی‌کند.

در حالت a ، ولو در بخش مجزا و کوچکی، انحراف بزرگی وجود دارد، و، بنابراین، نمی‌توانیم منحنی‌ها را نزدیک به هم به حساب بیاوریم؛ در حالی که، در مورد حالت‌های b و c ، این مشکل پیش نمی‌آید و می‌توان منحنی‌ها را نزدیک به هم دانست. به تعبیر دیگری، منحنی‌ها را در حالت c نمی‌توان نزدیک به هم دانست، چرا که رفتار آنها، با یکدیگر تفاوت کلی دارند. مثلاً، در بررسی مربوط به منحنی‌های متناوب و یا در حالتی که باید به مطالعه طول منحنی‌ها پرداخت، این منحنی‌ها، به کلی با یکدیگر متفاوت می‌شوند. ممکن است با موقعیت‌هایی برخورد کنیم که، در آن‌ها، دو منحنی هموار، وقتی نزدیک به هم به حساب آیند که، هم از نظر وضع استقرار و هم از نظر جهت خود، با هم سازگار باشند. به این مفهوم، منحنی‌های حالت b ، به هم نزدیک‌اند، در حالی که در مورد منحنی‌های حالت c ، چنین نیست، زیرا زاویه بین خط‌های مماس، مثلاً در نقطه‌های برخورد آن‌ها، به اندازه کافی بزرگ می‌شود.

محدودیت‌های مربوط به فاصله

نباید گمان کرد که هر موقعیتی را می‌توان، از دیدگاه فاصله، به صورت هندسی نمایش داد. در زندگی خیلی پیش می‌آید که مثلاً، پراون با سمیت و جون دوست باشد، در حالی که دو نفر اخیر، چشم دیدن یکدیگر را نداشته باشند. مشکل بتوان، در این حالت، دوستی را به معنای نزدیکی بیان کرد. اگر بخواهیم، به چنین بیانی اقدام کنیم، دچار تناقض می‌شویم. در واقع، اگر از موضع فاصله دآوری کنیم، این حکم درست است که: «اگر سمیت

به دوستش پراون نزدیک است، و چون هم به پراون نزدیک است، بنابراین، سمیت به چون نزدیک خواهد بود» ولو این که در واقعیت زندگی این طور نباشد. (ضمناً، باید گفت که، از همان آغاز تاریخ موجودیت انسان، این تناقض، چه در رابطه‌های فردی و چه در رابطه‌های سیاسی، وجود داشته است.) به همین مناسبت، باید معیارهایی را پیدا کرد که، به کمک آن‌ها، بتوان متوجه شد که آیا، این یا آن موقعیت مفروض، می‌تواند با اصطلاح فاصله، بیان شود یا نه؟ برای این منظور، احتمالاً، باید خود مفهوم فاصله را تجزیه و تحلیل کنیم: وقتی که از فاصله صحبت می‌کنیم و یا در باره آن می‌اندیشیم، چه ویژگی‌هایی را در نظر داریم؟ در زندگی، معمولاً فاصله را با عدد اندازه می‌گیریم و، مثلاً، می‌گوییم: فاصله از A تا B برابر ۳ کیلومتر است. عددی که فاصله را بیان می‌کند، هرگز منفی نیست؛ ما نمی‌گوییم که، فلان محل، در ۵- کیلومتری واقع است. ولی، این عدد، می‌تواند صفر باشد؛ این، یک حالت خاص است و، وقتی پیش می‌آید، که بخواهیم فاصله محلی را از خودش پیدا کنیم. فاصله بین دو چیز، بستگی به جهت اندازه‌گیری ندارد: فاصله از کمبریج تا لندن، همان فاصله از لندن تا کمبریج است. سرانجام، اگر مسافت را قطعه به قطعه انجام دهیم، فاصله، کوتاه‌تر نمی‌شود. اگر از A به C و بعد از C به B برویم، باید فاصله‌ای را طی کنیم که، دست کم، برابر با فاصله از A تا B است. به زبان دیگر، اگر ابتدا ۱۵ کیلومتر و سپس، پشت سر آن، ۴ کیلومتر را طی کنیم، نخواهیم توانست بیش از ۱۴ کیلومتر از نقطه اولیه، دور شویم. شرط‌های مربوط به فاصله را، می‌توان، به این ترتیب تنظیم کرد:

۱. برای هر دو موضوع A و B ، فاصله از A تا B معین است. آن را $d(A, B)$ نامیم.

۲. $d(A, B)$ ، عددی است حقیقی و غیرمنفی.

۳. $d(A, B)$ ، وقتی و تنها وقتی، برابر صفر است که، A بر B منطبق باشد.

$$d(A, B) = d(B, A) \quad ۴.$$

$$۵. d(A,C) + d(C,B) \geq d(A,B).$$

نظریه فاصله‌ها، با نتیجه‌هایی سروکار دارد که از این اصل‌ها به دست می‌آیند. از آن‌جا که اصل‌ها (یا ویژگی‌ها) به اندازه کافی ساده‌اند و، در عین حال، تعداد آن‌ها زیاد نیست، بنابراین، هندسه فاصله‌ها نمی‌تواند دشوار باشد. می‌توان قانع شد که، همه این ویژگی‌ها، برای فاصله، در هندسه اقلیدسی، صادق‌اند. برای این منظور، کافی است از دستور فاصله، که در تعریف ۲ فصل نهم آوردیم، استفاده شود. ضمناً، ویژگی‌های ۱ تا ۴، خیلی ساده و راحت، قابل تحقیق‌اند و تحقیق درستی ویژگی ۵، کمی پیچیده‌تر است.

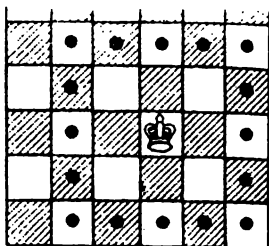
روشن است که، این پنج ویژگی، نسبت به اصل موضوع‌های هندسه اقلیدسی، حاوی آگاهی‌های به مراتب کمتری هستند. مثلاً، این ویژگی‌ها، برای فاصله‌های روی سطح کره زمین قابل اجرا هستند، در حالی که، سطح کره، هیچ شباهتی به صفحه اقلیدسی ندارد، می‌توان روشن کرد که، این شرط‌ها، در مورد کره‌ای که روی مجسمه یا دوچرخه بدون حرکت می‌خزد و در مورد آدمی که به بازاری در داخل دالان پرپیچ و خمی به بازاری مشغول است، نیز صادق است. در این حالت‌ها، فاصله، همیشه به معنای فاصله در طول کوتاه‌ترین مسیر است. این هم مهم نیست که چند مسیر، کاملاً شبیه هم، کوتاه‌ترین باشد (مثلاً، مسیر از قطب شمال به قطب جنوب در روی سطح زمین).

می‌توان نمونه‌هایی از فضاهای متری ساخت که، در آن‌ها، فاصله $d(A,B)$ معرف زمانی باشد که برای جابه‌جایی از A به B لازم است. همیشه باید به شرایطی که برای موقعیت مورد بررسی وجود دارد، توجه جدی داشت. مثلاً، وقتی حرکت در کوه را مطالعه می‌کنیم، به احتمال زیاد، برای بالارفتن از نقطه A تا نقطه B ، زمان بیشتری لازم است تا برای پایین آمدن

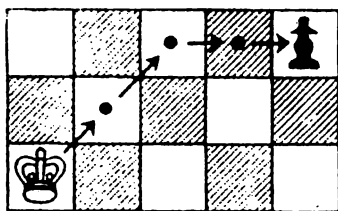
۱. شرط ۵ را، «نا برابری مثلث» هم می‌گویند، زیرا، در هندسه اقلیدسی، این مفهوم هندسی ساده را دارد که، طول یک ضلع مثلث ABC ، از مجموع طول‌های دو ضلع دیگر آن، تجاوز نمی‌کند. م.

از B به A ؛ بنابراین، شرط ۴ صدق نمی‌کند. احتمال نمی‌رود که بتوان همه شرطها را، ضمن حرکت در خیابان پرازدحامی که دائماً موجب تغییر سرعت می‌شود، رعایت کرد. ولی اگر این مانع‌ها از پیش پا برداشته شود، مثلاً برای حرکت از شهری به شهر دیگر، بتوان از فاصله زمانی صحبت کرد.

فضای متری را، به وسیله حرکت شاه در شطرنج هم، می‌توان تعریف کرد. می‌دانیم که شاه می‌تواند در هر جهتی به خانه مربعی مجاور برود. فاصله بین دو مربع را، به عنوان کمترین تعداد حرکتی می‌گیریم که برای شاه لازم است تا از خانه‌ای به خانه دیگر برود. شاه سفید، آن‌طور که در شکل ۸۳ دیده می‌شود، باید ۴ حرکت انجام دهد تا به خانه پیاده سیاه برسد. بنابراین، فاصله دو مربعی که شاه و پیاده در آن‌ها قرار دارند، برابر است با ۴. توجه کنیم که پیاده، در چهارگامی طرف راست و دوگامی بالای شاه قرار دارد و بزرگترین عدد، از بین این دو عدد، فاصله میان آن‌ها را به ما می‌دهد. شاه باید تنها چهار حرکت انجام دهد، زیرا بقیه دو گام جابه‌جایی خود را به طرف بالا، می‌تواند هم‌زمان با هر کدام از چهار حرکت خود تحقق بخشد. در این فضای شاه شطرنج، دایره به صورت مربع درمی‌آید، زیرا در هر فضای متری دوبعدی، دایره به مرکز A و شعاع r ، عبارت است از مجموعه نقطه‌های P که به فاصله r از نقطه A واقع باشند، یعنی نقطه‌هایی که، برای آن‌ها، برابری $d(A, P) = r$ برقرار باشد. روی شکل ۸۴، نقطه‌های سیاه، دایره‌ای را تشکیل می‌دهند که، شاه سفید، در مرکز آن قرار دارد و شعاع آن برابر است با ۲.



شکل ۸۴



شکل ۸۳

می‌توان روشن کرد که متریک شاه شطرنج، مفهومی ریاضی دارد. این فضا، نمونه‌ای از فضاهای متری است که، اغلب، مورد استفاده ریاضیات است و قابلیت تعمیم دارد. اگر صفحه شطرنج را، نه با شصت و چهارخانه، بلکه با میلیون‌ها خانه در نظر بگیریم، باز هم می‌توانیم فاصله را، با تعداد حرکت‌های شاه، تعریف کنیم. در این حالت، خانه‌ها چنان زیاد و به هم نزدیک‌اند که به سختی می‌شود آن‌ها را از هم تمیز داد و، در واقع، صفحه ما، پر به نظر می‌رسد. از این‌جا، به این فکر می‌رسیم که می‌توانیم، قاعده بالا را، برای جست‌وجوی فاصله، در یک صفحه پیوسته، مورد استفاده قرار دهیم. این اندیشه را می‌توان به این ترتیب تحقق بخشید که تفاضل مختصات متناظر را پیدا کنیم و، به عنوان فاصله بین دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) ، از بین دو عدد $|x_2 - x_1|$ و $|y_2 - y_1|$ ، بزرگترین آن‌ها را انتخاب کنیم^۱. در این فضا هم، دایره به صورت مربع درمی‌آید.

فضاهای باناخی

در ریاضیات جدید، اغلب به فضای باناخی اشاره می‌شود. کسی که ریاضیات نمی‌داند و یا ریاضی‌دانی که با ریاضیات سنتی کار می‌کند، ممکن است گمان کند که باناخ، تنها فضاهای خاص تازه‌ای را کشف کرده است. به یاد دارم که، بعد از آن‌که در باره فضاهای باناخی شنیدم، تنها وقتی توانستم ماهیت آن را درک کنم که آن را، در کتاب اصلی خود^۲، مطالعه کردم. باناخ،

۱. نماد $|x_2 - x_1|$ ، در این تعریف، عبارت است از فاصله روی خط راست حقیقی، این مقدار نشان می‌دهد که نقطه x_2 در چه فاصله‌ای از x_1 قرار دارد، اعم از این که، x_2 در سمت چپ x_1 واقع باشد یا در سمت راست آن. این نماد، در مورد عددهای مختلط هم، به معنای مدول یا قدر مطلق است؛ در این‌جا هم $|z_2 - z_1|$ به معنای آن است که z_2 در چه فاصله‌ای از z_1 قرار گرفته است.

2. S. Banach. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integral, Fundamenta mathematica, 3 (1922) (۱۳۱ تا ۱۸۱) (صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۸۱).

کار خود را از مطالعه ده موقعیت از ریاضیات سنتی (آنالیز ریاضی) آغاز کرد و ثابت کرد که، در واقع، در همه آن‌ها از يك استدلال استفاده شده است. او، سپس، از خود پرسید: «به چه مناسبت، باید يك اثبات را در هر يك از ده کتابی که به شرح این موقعیت‌ها می‌پردازند، تکرار کرد؟ مگر نمی‌شود، این اثبات را در يك کتاب بدهیم و در نه کتاب دیگر، تنها با آن اشاره کنیم؟». من در این جا سخن اصلی او را می‌آورم: «این کتاب، به جست و جوی قضیه‌های معینی می‌پردازد که در گوناگون‌ترین بخش‌های ریاضیات، درست باشند و خصیلت‌های آن، کمی بعد، روشن می‌شود. برای این که نیازی به اثبات این قضیه‌ها، در هر بخش جداگانه ریاضیات، نباشد و، بی جهت، موجب اتلاف وقت نشود، مسیر زیر را انتخاب کرده‌ام. مجموعه‌ای از عضوها را، به صورت کلی، در نظر می‌گیرم؛ برای این مجموعه، ویژگی‌های معینی را، به عنوان اصل موضوع‌ها، مشخص می‌کنم؛ این ویژگی‌ها را طوری انتخاب می‌کنم که بتوان از آن‌ها، قضیه‌هایی را نتیجه گرفت، سپس ثابت می‌کنم که این اصل موضوع‌ها برای هر شاخه جداگانه‌ای از ریاضیات، قابل قبول‌اند».

بنابراین، فضای باناخی، چیز تازه‌ای نیست. همه ما با این فضاها کار می‌کنیم، شبیه قهرمان داستان مولیر، که يك عمر «نثر» می‌گفت و خودش خبر نداشت. برای این که تردید را از خواننده شك برطرف کنم، می‌توانم بگویم که، خط زاست را، می‌توان به عنوان ساده‌ترین نمونه از قضایای باناخی به حساب آورد.

اصل «هرگز - هرگز» در ریاضیات

برای رسیدن به مفهوم فضای باناخی، بهتر است از بحث در باره زمینه‌ای آشنا، آغاز کنیم و، سپس، نشان دهیم که چگونه می‌توان، با تعمیم آن، راه ظریفی برای درك اندیشه باناخ پیدا کرد.

خیلی از عددها و تابع‌ها را در ریاضیات کلاسیک می‌شناسیم که تعریفی کاملاً معین دارند، ولی، اگر از ما بخواهند آن‌ها را بنویسیم، نمی‌توانیم. مثلاً، عدد π را می‌توان، در هندسه اقلیدسی، به عنوان مساحت دایره‌ای به شعاع واحد، تعریف کرد. ولی، اگر از ما بخواهند، مقدار دقیق عدد π را

نام ببریم، دچار دشواری می‌شویم، می‌توانیم، این عدد را، با هر تقریبی که نیاز داریم (و مثلاً به صورت $\frac{22}{7}$ ، $\frac{355}{113}$ و غیره)، نشان دهیم، ولی به علت گنگ بودن آن، نمی‌توانیم خود عدد را به صورت یک کسر محدود معرفی کنیم.

در فصل ششم، به نمونه دیگری هم برخورد کردیم. مقدار دقیق $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ را، نمی‌توان بایک عدد گویا نشان داد، اگرچه دنباله فیبوناچی

مقدارهای تقریبی $\frac{1}{1}$ ، $\frac{2}{1}$ ، $\frac{3}{2}$ ، $\frac{5}{3}$ ، $\frac{8}{5}$ ، $\frac{13}{8}$ ، ... را، تا هر دقت دلخواه، برای آن مشخص می‌کند.

ضمن مطالعه رشته‌های نامتناهی هم، به همین حقیقت برخورد می‌کنیم مثلاً، وقتی که عدد e ، به صورت رشته نامتناهی

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

داده می‌شود، به معنای آن است که، مجموع n جمله اول این رشته، مقدار تقریبی e را معین می‌کند و، با بزرگتر کردن n ، می‌توان این تقریب را، تا هر جا که بخواهیم، دقیق‌تر کرد.

نه فقط عددها، بلکه تابع‌ها هم، به همین طریق، تعریف می‌شوند. گاهی در مورد هایی هم که می‌توان تابع را به صورت تحلیلی کاملاً مشخصی معرفی کرد، از رشته‌های نامتناهی، برای محاسبه آن‌ها استفاده می‌کنند. مثلاً، در برخی موردها، به‌تراست، به جای عبارت دقیق تابع $\frac{1}{1-x}$ ، از بسط آن به

صورت رشته نامتناهی

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

استفاده کنیم. ولی، بسیاری از تابع‌ها را، که در آنالیز ریاضی وجود دارند، نمی‌توان به صورت دقیق بیان کرد: این تابع‌ها، تنها به عنوان حدی تعریف می‌شوند که، می‌توان به آن نزدیک شد، ولی نمی‌توان به آن رسید. این وضع، حتی برای تابع‌های آشنایی چون $\sin x$ و $\cos x$ هم وجود دارد. تابع e^x را

می‌توان به صورت يك رشته نامتناهی نشان داد و یا به عنوان حد عبارت
 $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ تعریف کرد. تابع $\sin^{-1}x$ بایک رشته نامتناهی و یا انتگرال

$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt$ تعریف می‌شود که این انتگرال هم، به نوبه خود تعریفی
 به صورت حد يك رونده نامتناهی دارد. بالاخره، يك رشته مفروض هم، می‌تواند
 به خودی خود، يك تابع را تعریف کند. مثلاً می‌توانیم درباره بررسی تابعی
 صحبت کنیم که به وسیله رشته

$$x + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + \dots$$

نشان داده شده است که، در آن، توان‌ها عبارتند از مجذور عددهای طبیعی.
 این تابع، به نظریه تابع‌های الیستیک (بیضوی) تعلق دارد.

خیلی از ریاضی‌دانان و کسانی که به فلسفه ریاضی پرداخته‌اند، دارای
 این نظر افراطی هستند که، در ریاضیات، نمی‌توان از عددهایی همچون عدد π
 استفاده کرد، زیرا بر اساس يك روند نامتناهی تعریف شده‌اند، که نمی‌توان آن
 را تا به آخر انجام داد. ولی، منطق این دیدگاه هرچه باشد، اکثریت ریاضی
 دانان - وهم غیر ریاضی‌دانان - آزادانه از تعریف‌هایی استفاده می‌کنند که
 شامل روندهای نامتناهی‌اند. اگر ریاضیات بخواهد از این تعریف‌ها صرف نظر
 کند، دچار محدودیت و تنگی بی‌اندازه‌ای می‌شود، با وجود این، تقریباً از
 سال ۱۷۶۰ به بعد، معلوم شد که باید باروندهای نامتناهی، با احتیاط کامل
 برخورد کرد. این تصور شتاب زده که، هردنباله‌ای عددی را تعریف می‌کند،
 ممکن است منجر به پارادوکس و تناقض شود. این مطلب را، با يك مثال،
 روشن می‌کنیم. ثابت می‌شود که رشته $1 + x + x^2 + \dots$ ، تنها با این

شرط که x بین -1 و 1 باشد، می‌تواند به $\frac{1}{1-x}$ نزدیک شود. بعضی از
 ریاضی‌دانان سده هیجدهم که گمان می‌کردند، قانون‌مندی‌های ریاضی، همیشه
 و خود به خود، درست‌اند، کوشیدند حاصل این رشته را، به ازای $x = -3$ ،
 به دست آورند و « ثابت کنند » که $\frac{1}{4}$ را می‌توان به صورت رشته
 $\dots - 81 + 27 - 9 + 3 - 1$ نشان داد. مثلاً فوریه، در کتاب خود به نام

«نظریهٔ تحلیلی گرما» (۱۸۲۹) - که باید آن را دورهٔ کاملی از ریاضیات دانست - در بخش ۲۰۸، اثباتی می‌دهد بر اساس این فرض که رشتهٔ $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ به معنای $\frac{1}{2}$ است.

نیل هنریک آبل ریاضی‌دان بزرگ، در نامه‌ای که در سال ۱۸۲۶ نوشت این نوع عمل را «اهریمنی» خواند.^۱ پروتاد بولتسانو (۱۷۸۱-۱۸۴۸)، ریاضی‌دان و استاد فلسفه و دین در پراگ هم، از این نوع استدلال انتقاد کرد. او گفت که اگر رشتهٔ $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ را S بنامیم، می‌توان با گروه‌بندی‌های مختلف جمله‌های آن، ثابت کرد که این رشته با هر عددی برابر است. در واقع، اگر S را به سه طریق مختلف بنویسیم، به سه نتیجهٔ مختلف می‌رسیم:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0,$$

$$S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1,$$

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S \Rightarrow S = \frac{1}{2}$$

و بنابراین، از این جا به دست می‌آید: $1 = 0 = \frac{1}{2}$ ، به این ترتیب، باید

رشته‌هایی را که رفتاری خوب دارند، یا رشته‌های متقارب را، مثل رشتهٔ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

از رشته‌هایی که رفتاری بد دارند، مثل رشتهٔ

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

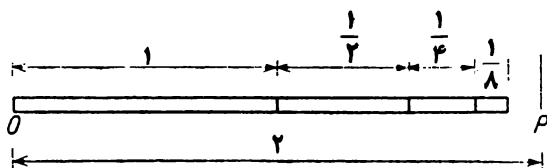
یعنی رشته‌های متباعد، از هم تمیز داد، همچنین، معیارهای بسیار ظریفی برای تشخیص رشته‌های با رفتار بسیار خوب (یا متقارب مطلق)، که دربارهٔ آن‌ها می‌توان، تقریباً همهٔ عمل‌های عقلانی را به کار برد، از رشته‌های با

۱. اوستن اور در رسالهٔ مربوط به کارهای آبل، جملهٔ نرم‌تری به کار می‌برد: «قضا و قدر واقعی» و ما، دو واقع، به درستی نمی‌دانیم که کدام يك از این جمله‌ها متعلق به آبل است.

رفتار متوسط (یا مقارب مشروط)، که درباره آن‌ها، مقداری احتیاط لازم است، وجود دارد. ما به بررسی ساده‌ترین نتیجه‌ای که، در ارتباط با رشته‌های با رفتار بسیار خوب، برای عددهای حقیقی و مختلط در سده نوزدهم به دست آمده است، می‌پردازیم. با ناخ ثابت کرد که این نتیجه‌گیری را می‌توان در مورد موقعیت‌های کاملاً کلی‌تری هم گسترش داد.

نمایش رشته به صورت زنجیر

برای این که بحث خود را دنبال کنیم، بهتر است، رشته را به صورت زنجیری تصور کنیم، آن طور که در شکل ۸۵ به تقریب در مورد رشته $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ نشان داده شده است. فرض می‌کنیم، نخستین حلقه

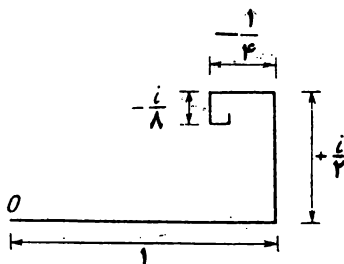


شکل ۸۵

زنجیر طولی برابر ۱ متر، دومی $\frac{1}{2}$ متر، سومی $\frac{1}{4}$ متر و غیره داشته باشند با اضافه شدن حلقه‌های تازه به زنجیر، طول آن بزرگتر می‌شود؛ ولی هر قدر هم که تعداد حلقه‌ها را زیاد بگیریم، هرگز به نقطه P ، که در ۲ متری مبدأ O قرار دارد، نمی‌رسیم، اگرچه هرچه بخواهیم، می‌توانیم به آن نزدیک شویم همین نزدیک شدن به نقطه P ، به معنای مقارب بودن رشته است.

اکنون به مساله‌ای اشاره می‌کنیم که پاسخ آن را، کمی بعد، خواهیم داد. جمله‌های رشته را، عددهای $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ می‌گیریم، ولی به خود حق می‌دهیم که علامت‌های بین آن‌ها را، به دلخواه، «+» یا «-» انتخاب کنیم: مثلاً، به صورت $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ بنویسیم. می‌پرسیم: آیا

ممکن است با این انتخاب عمدی علامت‌های «+» و «-»، به يك رشته متقارب رسید؟



شکل ۸۶

فعلاً از پاسخ به این پرسش می‌گذریم و به بررسی رشته
 $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ در فضای دوبعدی می‌پردازیم. اگر درین رشته،
 فرض کنیم: $x = \frac{1}{4}i$ ، که در آن $i = \sqrt{-1}$ ، آن وقت، به این رشته عددهای
 مختلط می‌رسیم:

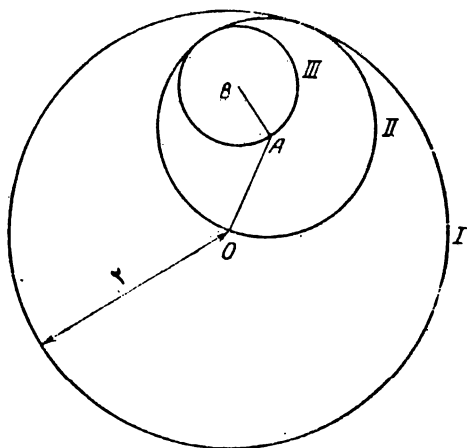
$$1 + \left(\frac{i}{4}\right) - \left(\frac{1}{16}\right) - \left(\frac{i}{64}\right) + \left(\frac{1}{256}\right) + \left(\frac{i}{1024}\right) + \dots$$

این رشته را می‌توان، در صفحه مختصات، با زنجیری که در شکل ۸۶ دیده
 می‌شود، نشان داد. این زنجیر، مارپیچ‌مانند، دور خود می‌پیچد و، روشن
 است، به نقطه متناظر با عدد $\frac{1}{1 - \frac{1}{4}i}$ نزدیک می‌شود. کاملاً روشن است که

شکل‌های ۸۵ و ۸۶، زنجیر را، در دو وضع مختلف، نشان می‌دهند. در هر
 حالت، زنجیر به نقطه‌ای نزدیک می‌شود، یعنی يك رشته متقارب است. به طور
 طبیعی، این پرسش پیش می‌آید: آیا می‌توان حلقه‌های زنجیر را طوری قرار
 داد که يك رشته متقارب نباشد؟ به زبان دیگر، آیا می‌توانیم با محکم کردن
 زنجیر در نقطه O، از راه انتخاب جهت حلقه‌ها، چنان حرکت نامنظمی به آن
 بدهیم که به هیچ نقطه‌ای نزدیک نشود؟

پیش از آن که شما انتخاب خود را انجام دهید، آیا من می‌توانم

پیش بینی کنم که خط سیر شما از هر جای دلخواهی می تواند بگذرد؟ به سادگی می توان روشن کرد که امکان های حرکت شما محدود است. مگر نه این است که، از هر چند حلقه ای که استفاده کنید، طول کل آنها، هرگز به ۲ متر نمی رسد.



شکل ۸۷

یعنی از قبل معین شده است که شما نمی توانید از دایره I ، به مرکز O و شعاع ۲، خارج شوید (شکل ۸۷). اگر تصمیم بگیرید، به عنوان نخستین حلقه، OA را انتخاب کنید، آن وقت، من می توانم پیش بینی خود را در مورد مسیر حرکت شما دقیق تر کنم: زنجیر نمی تواند، در این وضع، شما را از نقطه A ، به فاصله ای بزرگتر از ۱ ببرد. اکنون دیگر، در دایره II به مرکز A و شعاع ۱، محبوس شده اید. اگر، برای حلقه دوم، AB را انتخاب کنید، «زندان» شما در دایره III به مرکز B و شعاع $\frac{1}{4}$ خواهد بود، و به همین ترتیب، تا آخر. هر بار که حلقه ای را انتخاب می کنیم، در هر جهتی که باشد، شعاع دایره ای را که باید گام بعدی را در آن برداشت، نصف می کنید. بنابراین دیوارهای «زندان» شما، لحظه به لحظه، به هم نزدیک تر می شوند، مثل این است که شما را ناچار کنند، در محدوده یک نقطه باقی بمانید. انتخاب این نقطه در اختیار شماست: شما می توانید، کار خود را چنان تنظیم کنید که، زنجیر، به

هر نقطه‌ای از سطح دایره I یا روی محیط آن، نزدیک شود. ولی به هیچ طریقی نمی‌توانید از این «زندان» نجات یابید و تا ابد در آن سرگردان خواهید بود. این بحث را، که دربارهٔ رشتهٔ مشخصی انجام دادیم، می‌توان در مورد هر زنجیر دیگری هم، به طور کامل، به کاربرد. موضوع اصلی، در این جا، این است که، تعداد حلقه‌ها را هر قدر زیاد بگیریم، طول زنجیر، از عددی ثابت (شعاع دایره I) تجاوز نمی‌کند. و در هر حالت، وقتی که طول زنجیر محدود باشد، زنجیر ناچار است به نقطه‌ای نزدیک شود. در نظریهٔ عددهای مختلط این نتیجه به صورت قضیه‌ای بیان می‌شود که، در نظر اول، نوعی تکرار بیهوده جلوه می‌کند: اگر رشته‌ای، متقارب مطلق باشد، متقارب است. ولی این قضیه، خیلی هم بی معنی نیست. جملهٔ «متقارب است»، به این معناست که زنجیر به نقطه‌ای نزدیک می‌شود، در حالی که جملهٔ «متقارب مطلق» به این معناست که، هر چه تعداد حلقه‌ها را زیاد بگیریم، طول زنجیر، به عدد ثابت معینی نزدیک می‌شود. مهم این است که دومی، اولی را تأمین می‌کند و حکم قضیهٔ هم، چیزی غیر از این نیست. طول زنجیر، به وسیلهٔ یک رشتهٔ عددی داده می‌شود، در حالی که انحراف‌های زنجیر بارشته‌ای از بردارها، معین می‌شود. براساس این قضیه، می‌توان، با طرح روش کم و بیش پیچیده‌ای برای انتخاب جهت حلقه‌های زنجیر، پرسش‌های جالبی طرح کرد و تیزهوشی دانش‌آموزان را به آزمایش گذاشت. مثلاً، می‌توان همان زنجیر با حلقه‌های $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ و غیره را در نظر گرفت و آن‌ها را طوری به دنبال هم آورد که حلقهٔ با محور x زاویهٔ 1 درجه بسازد؛ حلقهٔ دوم، زاویهٔ 4 درجه؛ حلقهٔ سوم، زاویهٔ 9 درجه و، به طور کلی، حلقهٔ n ام زاویه‌ای برابر n^2 درجه با محور x بسازد. دانش‌آموزان باید روشن کنند که، آیا چنین استقراری از حلقه‌ها، رشتهٔ مقاربی از بردارها را تشکیل می‌دهد، یعنی آیا زنجیر به نقطه‌ای نزدیک می‌شود یا نه! ممکن است دانش‌آموزی تلاش کند تا وضع استقرار حلقهٔ n ام را محاسبه کند، چیزی که اصلاً لازم نیست. تنها باید به قضیهٔ فوق تکیه کرد. از آن جا که طول زنجیر، به وسیلهٔ رشتهٔ مقارب $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$ داده شده

است، بنابراین، زنجیر ناچار است به نقطه‌ای نزدیک شود.

هر عدد مختلط را می‌توان روی صفحه، به وسیله بردار z نشان داد. طول بردار را با $|z|$ نشان می‌دهند و آن را مدول یا قدر مطلق بردار می‌نامند. زنجیری که در شکل ۸۶ نشان داده‌ایم، متناظر است با رشته‌ای از عددهای مختلط (یا بردارها) که، در حالت کلی، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S = z_1 + z_2 + z_3 + \dots$$

طول زنجیر، بارشته‌ای از عددهای حقیقی داده می‌شود:

$$L = |z_1| + |z_2| + |z_3| + \dots$$

قضیه ما تأکید می‌کند که، از تقارب رشته L ، می‌توان تقارب رشته S را نتیجه گرفت.

تعمیم نتیجه‌گیری

این نتیجه‌گیری، بسیار سودمند است و می‌توان آن را، در فضایی که تعداد بعدهای بیشتری دارد، به کار برد. اگر همان زنجیر مثال قبل را در نظر بگیریم، و مثلاً آغاز آن را در مرکز اطاق بزرگی قرار دهیم و تصمیم بگیریم که حلقه‌های آن را در این اطاق (و نه روی صفحه)، به هر طریق دلخواهی، تنظیم کنیم، باز هم متوجه می‌شویم که، به نقطه‌ای نزدیک می‌شوند. استدلال با حالت دوبعدی، هیچ فرقی ندارد، جز این که، در این جا، باید به جای دایره‌ها (شکل ۸۷)، از کره‌های I ، II و III صحبت کنیم. بدون برخورد با هیچ دشواری، می‌توانیم، این نتیجه را، درباره فضاهای با بعدهای بیشتر هم، مورد بررسی قرار دهیم.

برای این که بتوانیم از این قضیه در میدان گسترده‌تری استفاده کنیم، برویژگی‌هایی تکیه می‌کنیم که، ضمن اثبات آن، مورد استفاده مقرر گرفت. رشته $S = z_1 + z_2 + z_3 + \dots$ ، شامل علامت جمع است؛ عمل جمع معنایی دارد که برای مقابل درك است و نشان می‌دهد که فضای مورد بررسی يك فضای برداری است. سپس، رشته L ، از طول حلقه‌های زنجیر تشکیل شده است؛ چون طول حلقه، به عنوان فاصله بین دو انتهای آن، تعریف می‌شود، بنابراین، فرض بر این است که، فاصله، در این فضا تعریف شده است و،

بنابراین، فضای ما، يك فضای متری است.

در فضای مورد بررسی ما، شرط سومی هم وجود دارد، که چندان روشن نیست. کسی را پیش خود تصور کنیم که با عددهای مختلط آشناست، ولی از عددهای گنگ اطلاعی ندارد. برای او، عددهای مختلط از همه عددهای به صورت $x+iy$ تشکیل شده‌اند، که در آن، x و y ، منحصرأ عددهایی گویا هستند. از آنجا که زنجیر می‌تواند طوری مستقر شود که به هر نقطه مورد علاقه ما در دایره I نزدیک شود، می‌توانیم این نقطه را،

نقطه $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ انتخاب کنیم، که «موجود فرضی ما» هیچ تصویری در باره

آن ندارد، از طرف دیگر، برای این که این «موجود» قبول کند که زنجیر به نقطه انتخابی ما نزدیک می‌شود، بحث را تنها با عددهای گویا دنبال می‌کنیم. در نتیجه، «موجود» می‌تواند دستگاه دایره‌های $I, II, III, \dots$

را، که مرتباً تنگ‌تر می‌شوند، نشان دهد. ولی از آنجا که نقطه $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

را نمی‌شناسد، با وجودی که می‌بیند، دایره‌ها مرتب تنگ‌تر می‌شوند و جای معینی از صفحه را «نشانه گرفته‌اند»، به اعتقاد او، نمی‌توان به چیزی دست یافت، درست مثل تور ماهی‌گیری که بدون ماهی از آب بیرون کشیده شود. عدم رضایت از همین موقعیت است که ما را به سمت عددهای گنگ هدایت می‌کند.

اگر صفحه را به عنوان فضایی در نظر بگیریم که از نقطه‌های بامختصات حقیقی x و y تشکیل شده است، آن وقت، می‌توان اطمینان داشت که دستگاه دایره‌هایی که لحظه به لحظه تنگ‌تر می‌شوند، به ناچار منجر به نقطه‌ای می‌شود. چنین فضایی را، کامل گویند. در حالت عکس، یعنی وقتی که دایره‌های تنگ شوند همیشه شامل نقطه‌ای نباشند، با فضای غیرکامل سرو کار داریم.

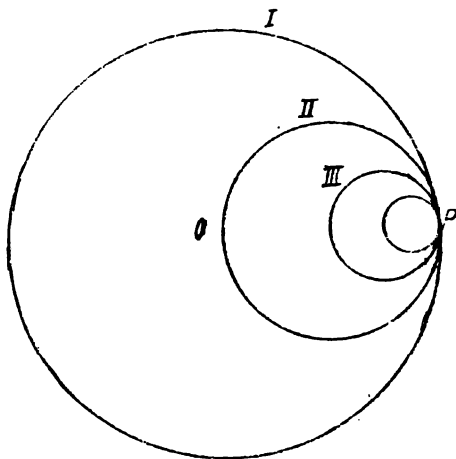
به این ترتیب، فضای مورد بررسی ما، باید با سه شرط سازگار باشد: اولاً، يك فضای برداری باشد، ثانیاً فضایی متری باشد و ثالثاً، فضایی کامل باشد. فضایی که با همه این شرط‌ها سازگار باشد، فضای باناخی نامیده

می‌شود. کمی بعد، اصل موضوع‌های فضای باناخی را تنظیم خواهیم کرد، ولی قبل از آن، راه خود را، در این جهت، دنبال می‌کنیم و نشان می‌دهیم که موقعیت‌های بسیار گوناگونی وجود دارد که می‌توانیم، در مورد آن‌ها، این قضیه را ثابت کنیم که: تقارب مطلق، تقارب ساده را تأمین می‌کند.

در آغاز، به این مطلب می‌پردازیم که، چگونه می‌توان اندیشه دایره و کره را تعمیم داد. برای این منظور، بهتر است اول، به بعضی اصطلاح‌ها بپردازیم. در هندسه سنتی، واژه «دایره» اغلب به دو معنا به کار می‌رود. گاهی، دایره به نقطه‌هایی گفته می‌شود که به فاصله r از مرکز O قرار گرفته‌اند (وتنها به آن‌ها)، در این حالت، «دایره» را به معنای یک مکان هندسی می‌گیریم و آن را با «محیط دایره» مترادف می‌کنیم. ولی، وقتی که از «مساحت دایره» صحبت می‌کنیم، منظورمان از «دایره» عبارت است از همان منحنی قبلی، به اضافه همه حوزة درونی آن. برای این که بتوان هریک از این موردها را با دقت و به سرعت شرح داد، سه تعریف زیر را وارد کرده‌اند که در هرفضای متری، یعنی در هرفضائی که فاصله قابل تعریف باشد، معنا دارند: کره، کره باز، کره بسته. کره به مرکز A و شعاع r ، به همه نقطه‌های P گفته می‌شود که از نقطه A به فاصله r باشند، یعنی برای آن‌ها داشته باشیم: $d(A, P) = r$. کره باز به مرکز A و شعاع به همه نقطه‌هایی گفته می‌شود که در درون این کره واقع باشند، یعنی همه نقطه‌هایی که برای آن‌ها داشته باشیم: $d(A, P) < r$. کره بسته، از همه نقطه‌هایی تشکیل شده است که یا روی کره باشند و یا در درون آن، یعنی همه نقطه‌هایی که برای آن‌ها داشته باشیم: $d(A, P) \leq r$. کره، به معنای پوسته کره بسته است؛ اگر این پوسته را کنار بزنیم، کره باز به دست می‌آید.

توجه کنیم که «کره»، در فضای دوبعدی، به معنای محیط دایره و در فضای یک بعدی به معنای دو نقطه است. این نکته‌ها، ممکن است زیادی به نظر آیند، ولی ضرورت وجود آن‌ها وقتی احساس می‌شود که بخواهیم، برای همه فضاها - با هر تعداد بعد (و حتی برای فضای بی‌نهایت بعدی) - اصطلاح‌های واحدی داشته باشیم.

در بحثی که دربارهٔ دایره‌های $I, II, III, \dots$ داشتیم، باید نتیجه را با اصطلاح «کره‌های بسته» بیان کرد. به عنوان مثال ساده، رشته $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ را در نظر می‌گیریم، که روی شکل ۸۸ نشان داده شده است. همهٔ دایره‌های $I, II, III, \dots$ در نقطهٔ P ، که نمایندهٔ عدد ۲



شکل ۸۸

می‌باشد، برهم مماس‌اند؛ نقطهٔ P به همهٔ کره‌های بستهٔ دستگاه ما، متعلق است. ولی، حتی يك نقطه هم پیدا نمی‌شود که به همهٔ کره‌های باز دستگاه، تعلق داشته باشد، زیرا هیچ نقطه‌ای وجود ندارد که در درون همهٔ دایره‌های مفروض قرار گرفته باشد.

معادلهٔ انتگرالی

از آن جا که باناخ، در سر لوحهٔ کارهای خود، از «کاربرد در معادله‌های انتگرالی» یاد می‌کند، ساده‌ترین نوع معادلهٔ انتگرالی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگر از تابع e^x در فاصلهٔ ۰ تا x انتگرال بگیریم، به عبارت $1 - e^{-x}$ می‌رسیم. e^x را به طور ساده با f و عمل انتگرال گیری در فاصلهٔ مفروض را با J نشان می‌دهیم. به این معادله می‌رسیم:

$$[f = f - 1 \quad (1)$$

که مشخص کننده تابع f است. از آن جا که هیچ تابع دیگری، به جز f ، در معادله (۱) صدق نمی کند، بنابراین، تابع f را می توان به عنوان جواب معادله (۱) معرفی کرد. ممکن است، در این کار، فایده ای نباشد، ولی از نظر ریاضی، کاملاً قانونی است. اگر این نتیجه را به ترتیب زیر به دست آورید، فکر می کنید با چه عکس العملی مواجه شوید.

ابتدا، معادله (۱) را به این صورت می نویسیم:

$$1 = f - [f \quad (2)$$

احتمال نمی رود که، در این جا، با اعتراضی روبه رو شوید. حالا رابطه (۲) را به این صورت می نویسیم:

$$1 = (1 - [f)f \quad (3)$$

در این جا، احتمالاً، اعتراض ها مربوط به این باشد که معادله (۳)، تنها از نظر زبان شناسی، با معادله (۲) فرق دارد، زیرا نمادهایی که در آن به کار رفته است، هیچ تفاوتی با معادله (۲) ندارند. اکنون، دوطرف را بر $(1 - [f)$ تقسیم می کنیم و آن را به این صورت می نویسیم:

$$f = \frac{1}{1 - [f} \quad (4)$$

و کسر واقع درست را به صورت مجموع جمله های يك تصاعد هندسی نزولی نامتناهی، با قدر نسبت $[f$ ، بیان می کنیم:

$$f = (1 + [f + [f[f + [f[f[f + \dots) \cdot 1 \quad (5)$$

و اکنون، انتگرال گیری را انجام می دهیم. اگر از ۱ در فاصله ۰ تا x انتگرال

بگیریم، x به دست می آید. عمل را دوبار انجام دهیم، به $\frac{x^2}{2}$ می رسیم؛ سه

بار تکرار کنیم، $\frac{x^3}{6}$ به دست می آید و غیره. بنابراین

$$f = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \quad (6)$$

به سادگی می توان تحقیق کرد که، جمله عمومی رشته (۶)، همان جمله

عمومی رشته‌ای است که از بسط تابع e^x به دست می‌آید: بنابراین، روش مورد استفاده ما، دست کم این فایده را داشت که ما را به جواب درست رسانید.

من این محاسبه‌ها را، بارها، در کلاس‌های بالا مطرح کرده‌ام و تقریباً همه جا، با خنده آن‌ها مواجه شده‌ام. ولی، در واقع، خنده‌دارتر از همه، این است که، این محاسبه‌ها، کاملاً دقیق‌اند و روند عادی حل معادله‌های انتگرالی را تشکیل می‌دهند. با وجود این، برای این که گمان نرود که در ریاضیات، همه چیز مجاز است، باید اضافه کنم که: یک راه حل را، تنها وقتی می‌توان دقیق دانست که متکی بر حکم‌های شناخته شده‌ای باشد که، در هر گام، راه حل را تأیید کنند. جواب ما، در واقع، متکی بر سه حکم است که درستی آن‌ها را باید ثابت کرد: (۱) رشته (۶) متقارب است، یعنی چیزی را معرفی می‌کند، (۲) این «چیز» همان جواب معادله (۱) است، و (۳) جواب دیگری وجود ندارد.

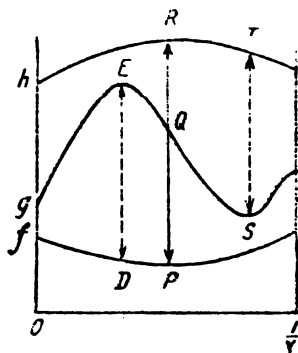
تقارب رشته (۶) را می‌توان، برای هر مقدار به دلخواه بزرگ x ، ثابت کرد. به کمتر از آن قناعت و خود را به فاصله $\frac{1}{4} \leq x \leq 0$ محدود می‌کنیم، زیرا

در این حالت، می‌توانیم بر تصاعد هندسی آشنای $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots$ تکیه کنیم و استدلال خود را بر همان روشی بگذاریم که قبلاً دیده‌ایم. به یاد بیاوریم که، این رشته را، به صورت زنجیری نشان دادیم که حلقه‌های آن، طول‌هایی برابر با جمله‌های این تصاعد هندسی داشتند.

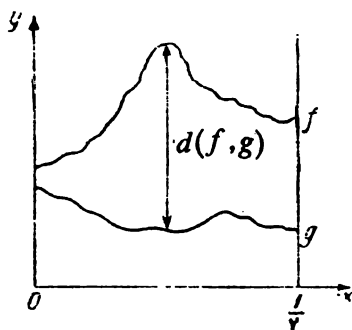
این زنجیر، در فضایی قرار می‌گیرد که، به ترتیب زیر، به دست می‌آید. فرض کنیم، تعداد بسیار زیادی برچسب داشته باشیم که، روی هر کدام از آن‌ها، نمودار (یا نام دیگری) تابعی نشان داده شده باشد، که در فاصله 0 تا $\frac{1}{4}$ پیوسته است. سپس، فرض می‌کنیم فضای عظیمی داشته باشیم که، در آن،

این نمودارها را به ترتیبی منظم کرده باشیم. چون، تابع‌های پیوسته، تشکیل یک فضای برداری می‌دهند (فصل هفتم را ببینید)، باید آن را در وضع

قرار گرفتن نمودارها پیدا کرد. اکنون باید بینیم، منظورمان از فاصله بین نمودارها چیست، چرا که می‌خواهیم درباره طول حلقه‌های زنجیر صحبت کنیم. قبل از همه شرط می‌کنیم: دو نمودار وقتی نزدیک به هم اند که به تقریب نماینده يك تابع باشند و دو نمودار را دور از هم می‌گیریم، وقتی که نماینده تابع‌هایی کاملاً مختلف باشند. روی شکل ۸۹، دو نمودار $y = f(x)$ و $y = g(x)$ داده شده است و، پیکان، حداکثر دوری نمودارها را نشان می‌دهد. همین حداکثر اختلاف بین عرض‌های نمودارها را، که با پیکان مشخص شده است، به عنوان فاصله دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نظر می‌گیریم و، به طور خلاصه، به صورت $d(f, g)$ نشان می‌دهیم.



شکل ۹۰



شکل ۸۹

به سادگی می‌توان روشن کرد که، این تعریف برای فاصله بین تابع‌ها، با هر پنج شرط فاصله، که قبلاً داشتیم، سازگار است. در واقع $d(f, g)$ به وسیله يك عدد حقیقی غیرمنفی معین می‌شود. در حالت $d(f, g) = 0$ ، حداکثر فاصله بین نمودارها، برابر صفر است، یعنی دو نمودار برهم منطبق اند و شرط ۳ صادق است. برقراری شرط ۴ هم، به همین اندازه، روشن است. تحقیق شرط ۵، روی شکل ۹۰ نشان داده شده است. از این شکل دیده می‌شود که $d(f, g) + d(g, h)$ ، کمتر از $d(f, h)$ نیست. در واقع، $d(f, h)$ عبارت است از طول پاره خط PR ، که می‌تواند به PQ و QR تقسیم شود. PQ نمی‌تواند از DE - که حداکثر فاصله بین f و g است -

تجاوز کند؛ به همین ترتیب، QR هم نمی تواند از ST تجاوز کند و، بنابراین، به دست می آید:

$$PQ + QR \leq DE + ST$$

ولی $DE = d(f, g)$ و $ST = d(g, h)$ ، در نتیجه

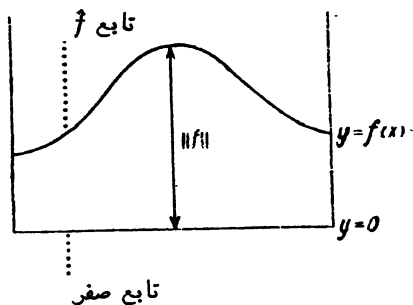
$$d(f, g) + d(g, h) \geq d(f, h)$$

و شرط ۵ برقرار است. این اثبات، هنوز به بعضی قیدها نیاز دارد، چرا که آن را برای ساده ترین وضع استقرار نمودارها آوردیم. با وجود این، اثبات ما، در مورد حالت های دیگر وضع نمودارها هم، به دشواری چندانی برخورد نمی کند.

به این ترتیب، این فضای تابع ها، با دوشروط از فضای باناخی، تطبیق می کند: این، يك فضای برداری است و، ضمناً مفهوم فاصله هم در مورد آن تعریف شده است. تنها این می ماند که ثابت کنیم، این فضا، کامل است، یعنی کره هایی که مرتباً کوچک و کوچکتر می شوند، همیشه نمودار تابع پیوسته ای را در بر می گیرند. این مطلب را هم، می توان، بدون یاری جستن از ریاضیات معاصر، و تنها با تکیه بر روش های آنالیز کلاسیک (که مورد استفاده ریاضی دانان سده نوزدهم بود)، ثابت کرد. باناخ ثابت کرد که، در هرفضایی که با این سه شرط سازگار باشد، می توان تقارب زنجیر را تضمین کرد، به شرطی که بدانیم، طول کلی زنجیر، محدود است. بنابراین، باید طول زنجیری را پیدا کنیم که با رشته ای که در معادله های (۵) و (۶) وارد شده است، متناظر باشد.

طول حلقه

همان طور که قبلاً هم گفتیم، در حالت عددهای مختلط، طول زنجیر بارشته $L = |z_1| + |z_2| + |z_3| + \dots$ معین می شود که، جمله های آن، عبارتند از حلقه های جداگانه زنجیر. برای عدد مختلط $|g_1|$ ، فاصله را از نقطه z_1 تا مبدا O در نظر می گیرند. در مورد تابع ها، این مطلب به معنای آن است که طول حلقه f_1 را با فاصله تابع f_1 از تابع صفر، یعنی $d(f_1, 0)$ را معین کنیم. تابع صفر را، تابع بانمودار $y = 0$ می گیریم، زیرا این، همان بردار



شکل ۹۱

صفر است. از این به بعد، شبیه $|z|$ ، طول حلقه f را به صورت $\|f\|$ نشان می‌دهیم. آنچه را که برای تابع f گفتیم، به طور طبیعی در مورد تابع‌های $f_1, f_2, \dots$ هم می‌توان گفت.

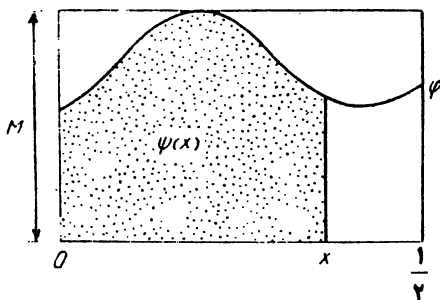
بنابراین، برای هر تابع پیوسته‌ای، $\|f\|$ ، به معنای $d(f, 0)$ است، که روی شکل ۹۱ هم منعکس شده است. طول پیکان، معرف حداکثر دوری نمودار تابع $y = f(x)$ و تابع صفر، نسبت به یکدیگر است.

به زبان جبری، $\|f(x)\|$ ، به عنوان مقدار حداکثر $|f(x)|$ تعریف می‌شود. علامت قدر مطلق را، به این مناسبت به کار برده‌ایم، که $f(x)$ ، می‌تواند مقدارهای مثبت یا منفی را قبول کند. ما به حداکثر فاصله $f(x)$ از ۰ نیاز داریم، و در غم آن نیستیم که، آیا این فاصله در بالای $y = 0$ قرار دارد یا در زیر آن.

منظور ما از $\|f\|$ ، چیزی شبیه اندازه تابع است؛ این، يك مفهوم تازه است و در آنالیز ریاضی سستی، برخوردی با آن نداشته‌ایم.

تأثیر انتگرال گیری

معادله‌های (۵) و (۶)، شامل رشته‌ای هستند که، در آن، هر جمله عبارت است از انتگرال جمله قبل از آن، روشن کنیم که: آیا انتگرال گیری، تأثیری بر اندازه تابع می‌گذارد؟ تابع پیوسته $\varphi(x)$ را در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم که، در آن، $\|\varphi\| = M$. این، به معنای آن است که در انتگرال مفروض، مقدار عددی $\varphi(x)$ به M می‌رسد، ولی از آن تجاوز نمی‌کند.



شکل ۹۲

(شکل ۹۲ را ببینید). روی شکل ۹۲، برای علنی تر شدن مطلب، ساده ترین حالت تابع $\varphi(x)$ را در نظر گرفته ایم، که در همه جا، مثبت است. بدون هیچ دشواری خاصی، می توان ثابت کرد که، نتیجه ها، برای حالت کلی هم درست است. ψ را برای $\int \varphi$ گرفته ایم، تابعی که از انتگرال تابع φ در فاصله 0 تا x به دست آمده است. می خواهیم $\|\psi\|$ را ارزیابی کنیم، یعنی اندازه $\psi(x)$ که با مقدار حداکثر $|\psi(x)|$ داده شده است. چون تابع $\psi(x)$ ، انتگرال را بیان می کند، می توان آن را به صورت مساحت زیر نمودار $\varphi(x)$ در فاصله از 0 تا x در نظر گرفت. روی شکل ۹۲، این مساحت مشخص شده است و به طور کامل در داخل مستطیل به قاعده $\frac{1}{4}$ و ارتفاع M قرار دارد. در نتیجه، $\psi(x)$

نمی تواند از $\frac{1}{4}M$ تجاوز کند و، بنابراین، $\|\psi\|$ هم، بنا بر تعریف، از $\frac{1}{4}M$ تجاوز نمی کند، به زبان دیگر، اندازه تابع $\psi(x)$ از نصف اندازه تابع $\varphi(x)$ - که از انتگرال آن به دست می آید - تجاوز نمی کند. به این ترتیب، انتگرال گیری، اندازه تابع (۱، دست کم، نصف می کند. عمل انتگرال گیری، اندازه تابع را ممکن است بیشتر هم کاهش دهد، چیزی که معمولاً پیش می آید.

تمرین

اندازه جمله های رشته (۶) را محاسبه کنید. نسبت هر جمله را به جمله قبل پیدا کنید و تحقیق کنید که، این نسبت، به جز يك استثنا، از $\frac{1}{4}$ کمتر است.

نتیجه‌ای که دربارهٔ انتگرال گیری به دست آوردیم، موقعیت مناسبی ایجاد می‌کند. رشته‌های معادله‌های (۵) و (۶) متناظر با زنجیری هستند که، در آن، هر حلقه نصف حلقهٔ قبلی و یا بازهم کوچکتر از آن است. به زبان دیگر، رشته‌ای را که به وسیلهٔ طول این حلقه‌ها تشکیل می‌شود، می‌توان با یک تصاعد هندسی با قدر نسبت^۱ مقایسه کرد. درست است که بسیاری از حلقه‌ها قابل تطبیق با آن نیستند، ولی به هر حال، طول زنجیر هرگز نمی‌تواند از دو برابر طول نخستین حلقه تجاوز کند. بنابراین، می‌توانیم در اینجا، از «زندانی که لحظه به لحظه تنگ‌تر می‌شود» صحبت کنیم، یعنی دنباله‌ای از کره‌ها را پیدا کنیم که به سمت نقطه‌ای منقبض شوند، نقطه‌ای که زنجیر به آن نزدیک می‌شود. به این ترتیب، قانع می‌شویم که، رشته‌های (۵) و (۶) متقارب‌اند. از نظر طرح صوری، این اثبات را نمی‌توان کامل دانست. ما مثلاً ثابت نکردیم، تابع پیوسته‌ای که رشته به سمت آن متقارب می‌شود، همان جواب معادله (۱) است. ولی قصد ما این نیست که این گونه شکاف‌ها را پر کنیم، بلکه هدف ما این است که اندیشهٔ باناخ و نیرو و زیبایی آن را در چنین موردی نشان کنیم.

همان‌طور که در ابتدای این فصل هم یادآوری کردیم، می‌توانیم، در رابطهٔ با هدفی که بررسی مورد نظر دنبال می‌کند، از روش‌های عقلانی متفاوتی برای تعریف فاصلهٔ بین دو تابع، استفاده کنیم. تعریفی را که در اینجا، برای فاصله، مورد استفاده قرار داده‌ایم، گاهی هتريك یکنواخت می‌گویند. این تعریف، با مفهوم نسبتاً دشوارتر تقارب یکنواخت، در آنالیز ریاضی، بستگی نزدیکی دارد. وقتی می‌گوییم، زنجیر $f_1 + f_2 + f_3 + \dots$ به نقطه‌ای نزدیک می‌شود (و این، به معنای آن است که فاصلهٔ انتهای زنجیر تا نقطه‌ای که به آن نزدیک می‌شود، به سمت صفر میل می‌کند)، آنالیز کلاسیک باید بگوید که، در این حالت، رشته $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$ ، به طوری یکنواخت به سمت تابع $f(x)$ متقارب است. روش هندسی که، در بالا، برای تقارب یکنواخت آوردیم، یکی از ساده‌ترین روش‌ها برای مطالعه است و، به جای روش سنتی قدیمی، به صورت گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فضایی که، در این جا، مورد استفاده قرار دادیم و، در آن، هر نقطه نماینده يك تابع پیوسته است، گاهی بانماد $(I) \mathcal{G}$ نشان داده می شود. این نماد نشان می دهد که با تابع های پیوسته و در فاصله I سروکار داریم. (نشان $\mathcal{G}$ ، متناظر با پیوستگی است). در حالت مورد بحث ما، فاصله I عبارت بود از فاصله $(0, \frac{1}{p})$.

رشته های تبدیل

نزدیک دوسده پیش، که معلوم شد، همه ویژگی های مقدماتی تابع های مثلثاتی، همان ویژگی های جبری تابع $\theta^i e$ هستند، مثلثات به صورت بخشی از جبر درآمد. اگر در $\theta^i e$ فرض کنیم $\theta = 1$ ، به صورت i^e ساده می شود، که در آن، i ، به عنوان «دوران به اندازه زاویه قائمه» تعبیر می شود. به همین مناسبت، حتی در ریاضیات سال های ۱۷۵۰، به این اشاره مهم برخورد می کنیم که: « e را به توان i رساندن، یعنی دوران به اندازه زاویه قائمه». از آن جا که، «دوران به اندازه زاویه قائمه» متعلق به نوع تبدیل های خطی است (که در فصل سوم، مورد مطالعه قرار دادیم)، بنابراین، این امکان به وجود می آید که درباره e^T بیندیشیم و آن را درک کنیم، که در آن، T ، به جای تبدیل، و یا اگر می خواهید، به جای ماتریس نماینده این تبدیل نشسته است. چون e^* را، ساده تر از هر چیز، می توان به صورت رشته مطرح کرد، بنابراین، باید روی موضوع تقارب یا تباعد رشته ای بحث کنیم که توان تبدیل را تشکیل می دهد. قضیه ما، درباره تقارب زنجیر، برای این جا هم مناسب است ولی، برای اینکه بتوانیم از آن استفاده کنیم، باید تعریف رضایت بخشی برای فاصله از تبدیل A تا تبدیل B پیدا کنیم و، ضمناً، اندازه تبدیل T را به دست آوریم. یعنی باید $d(A, B)$ و $\|T\|$ را معین کنیم.

ابتدا، دوران را، به عنوان نمونه خاصی از تبدیل، در نظر می گیریم. این، طبیعی و درست است که بگوییم: دوران به اندازه ۱۰ درجه، به دوران به اندازه ۱۱ درجه نزدیک و از دوران به اندازه ۶۰ درجه دور است. دوران هم، مثل هر تبدیلی، بر نقطه های صفحه اثر می گذارد. به همین دلیل، دو

دوران B و A را وقتی نزدیک می گیریم که تاثیر آن ها بر نقطه های صفحه، تقریباً یکسان باشد. سپس، فرض می کنیم، دوران های B و A ، نقطه ای مثل P را، به ترتیب، منجر به نقطه های Q و R کنند. در نگاه اول، گمان می رود که نزدیکی نقطه های Q و R ، می تواند به معنای نزدیکی دوران های A و B باشد. ولی، در این جا، انتخاب نقطه P ، نقش دارد. این را، با مثالی روشن می کنیم. با فرض این که، B و A متناظر با دوران های به اندازه 10° درجه 11° درجه باشند، نقطه P را در یک میلیون کیلومتری مبدا O انتخاب می کنیم. در این صورت، نقطه های Q و R در 16000 کیلومتری یکدیگر قرار می گیرند که، با تصور عادی ما، بسیار بزرگ، ولی در مقایسه با یک میلیون کیلومتر، به اندازه کافی کوچک است. در این حالت، می گوییم: نتیجه تاثیر عمل های B و A را، تقریباً یکسان گویند، وقتی که فاصله QR در منایسه با فاصله OP کوچک باشد: یعنی، نسبت $\frac{QR}{OP}$ به عنوان معیار اختلاف نتیجه تاثیر عمل های B و A

بر نقطه P ، در نظر گرفته می شود. روش دیگری هم وجود دارد، شرط می کنیم که، فاصله OP ، از واحد تجاوز نکند. در این صورت، فاصله QR تنها وقتی بزرگ خواهد شد که تاثیر عمل ها بر نقطه، کاملاً متفاوت باشند و به فاصله نقطه P از O ارتباطی پیدا نمی کند.

با استفاده از روش دوم، معیار و سنگ محکی برای اختلاف دو تبدیل خطی پیدامی کنیم. v را بردار OP می گیریم که، طول آن، نباید از واحد تجاوز کند. نقطه های Q و R ، به وسیله بردارهای Av و Bv و فاصله QR ، با طول بردار $Bv - Av$ داده می شود. بردار v را (با رعایت محدودیتی که برای طول آن وجود دارد)، طوری انتخاب می کنیم که، طول $Bv - Av$ ، تا حد امکان بزرگ باشد. این حداکثر طول $Bv - Av$ را، به عنوان فاصله بین A و B ، یعنی به عنوان $d(A, B)$ ، می پذیریم. این تعریف، معیار کاملاً خوبی از شباهت بین عمل A و B خواهد بود. فرض کنیم، برای دو عمل معین A و B ، به دست آورده باشیم: $d(A, B) = 0.001$. و این، به معنای آن است که، به کار بردن B و A در مورد بردار v به طول 1 سانتی متر، نقطه های حاصل Bv و Av را، حداکثر، به اندازه 0.001 سانتی متر از هم دور می کند.

اکنون، اگر فرض کنیم، محل A بادستوری پیچیده و عمل B بادستوری ساده داده شده باشند، و ضمناً حق داشته باشیم از اشتباه به اندازه $1/500$ در جواب مسأله خود صرف نظر کنیم، آن وقت، بدون این که زیانی به مسأله ما وارد شود، می توانیم، به جای عمل یغرنج A ، از عمل ساده تر B استفاده کنیم.

به این ترتیب، با تعریف فاصله $d(A, B)$ ، اکنون در موقعیتی هستیم که اندازه تبدیل A را تعریف کنیم. در بخش «طول حلقه»، به عنوان اندازه عدد مختلط، فاصله آن را از عدد مختلط 0 ، و به عنوان اندازه تابع f ، فاصله آن را تا تابع صفر، در نظر گرفتیم. بنابراین، طبیعی است که اندازه تبدیل A را هم، همان فاصله آن تا تبدیل 0 بگیریم، یعنی $\|A\|$ را به عنوان $d(A, 0)$ تعریف کنیم.^۱ با تبدیل B ، در تعریف $d(A, B)$ ، به صفر، معلوم می شود که $\|A\|$ به معنای حداکثر طولی است که بردار A می تواند داشته باشد، به شرطی که طول بردار v از واحد تجاوز نکند.

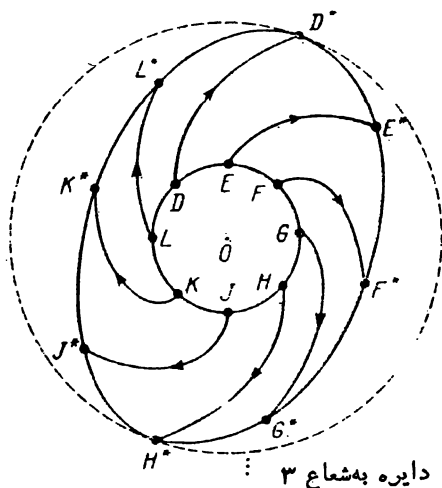
آنچه را گفتیم، می توان به سادگی، به صورت عینی تصور کرد. چون طول بردار v از واحد تجاوز نمی کند، بنابراین، نقطه ای است در داخل یا روی محیط دایره واحد $x^2 + y^2 = 1$. تبدیل A ، هر بردار v را به بردار Av منجر می کند. اکنون اگر همه نقطه های Av را روی یک کاغذ شطرنجی وارد کنیم، حوزه ای را که محدود به یک بیضی است، پرمی کنند.

روی شکل ۹۳، دایره واحد و بیضی - که دایره در نتیجه تبدیل A به آن منجر می شود - داده شده است؛ در این جا، تبدیل A ، با معادله های $x^* = x + 2y$ ، $y^* = -2x + 2y$ تعریف شده است. نقطه های D^* و H^* در روی بیضی، بیش از هر نقطه دیگری، از مبدا O دورند. فاصله آن ها تا نقطه O ، برابر است با ۳ واحد.

بنابراین، اگر طول بردار v کوچکتر یا برابر ۱ باشد، طول بردار Av کمتر یا برابر ۳ خواهد بود، یعنی عمل A ، هرگز بردار را به بیش از ۳ برابر خود کش نمی دهد. برای این عمل: $\|A\| = 3$.

شکل ۹۳، نه تنها مفهوم اندازه تبدیل، یعنی $\|A\|$ را، به طور عینی

۱. در ادبیات ریاضی، $\|A\|$ را نرم تبدیل A گویند.



شکل ۹۳

نشان می‌دهد، بلکه ضمناً کم می‌کند ببینیم، فاصله بین دو عمل A و B چیست. $d(A, B)$ ، چیزی جز همان اندازه اختلاف دو عمل A و B نیست. در واقع، عبارت $d(A, B)$ است از حداکثر طول بردار $Bv - Av$ ، با این شرط که طول بردار v ، از واحد تجاوز نکند. $Bv - Av$ را می‌توان به صورت $(B - A)v$ نوشت. ولی، مقدار حداکثر $(B - A)v$ عبارت است از $\|B - A\|$ ، اندازه اختلاف $B - A$ ؛ یعنی $d(A, B)$ همان اندازه اختلاف $B - A$ است.

مثلاً، می‌خواهیم فاصله بین ماتریس‌های $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

را بدانیم. اختلاف بین آن‌ها، عبارت است از ماتریس $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ، که روی شکل ۹۳ نشان داده شده است. همان‌طور که می‌بینیم، اندازه آن، ۳ می‌باشد. بنابراین، فاصله بین دو ماتریس، برابر است با ۳.

عدد $\|A\|$ را می‌توان به عنوان بیشترین افزایش طول هر بردار دلخواه در اثر عمل A دانست. اگر داشته باشیم: $\|A\| = a$ و $\|B\| = b$ ، می‌توان قانع شد که $\|AB\|$ نمی‌تواند از ab تجاوز کند. هریک از عمل‌های A و B ، به ترتیب، موجب افزایشی به اندازه a و b بار می‌شوند؛ وقتی که عمل B

با عمل A همراه شود، منجر به افزایش بیش از ab بار شود. معمولاً، افزایش کمتر از این است، زیرا بردار انتخابی، تنها، ضمن عمل اول، حداکثر افزایش را پیدا کند. این مطلب، برای حالت $A=B$ هم درست است، بنابراین معمولاً $\|A^2\|$ کمتر از $\|A\|^2$ است.

تمرین

در نتیجه تبدیل $A: x^* = 2x, y^* = 3y$ ، که برای آن $\|A\| = 3$ ، بردار $(0, 1)$ حداکثر افزایش را پیدا می‌کند. تحقیق کنید $A^2 = 6I$ و، بنابراین، $\|A^2\| = 6$ ، یعنی کمتر است از 3^2 .

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که $\|A^n\|$ هرگز از $\|A\|^n$ تجاوز نمی‌کند و معمولاً کمتر از آن است.

این بند را با این پرسش آغاز کردیم که: A یک تبدیل یا ماتریس باشد، آیا استفاده از رشته e^A قانونی است؟ هم‌اکنون یادآوری کردیم که، اگر داشته باشیم: $\|A\| = a$ ، اندازه A^n هرگز از a^n تجاوز نمی‌کند. بنابراین، هر جمله رشته e^A ، اندازه‌ای دارد که از جمله متناظر رشته e^a - که برای همه مقادیر a متقارب است - تجاوز نمی‌کند. یعنی، دوباره بازنجیری سروکار داریم که از پاره‌خط‌های با طول محدود تشکیل شده است و، بنابراین، می‌توانیم از استدلال قبلی استفاده کنیم.

رشته تبدیل را، با دوران‌هایی روشن کردیم که نگاشت یک صفحه را بر خودش می‌دهد. همین استدلال را، در مورد فضاهای دیگر هم می‌توان داد. مثلاً، در بخش «تأثیر انتگرال‌گیری» ثابت کردیم که، با شرط‌های معینی، عمل انتگرال منجر به تابعی می‌شود که، اندازه آن، عبارت است از نصف بزرگترین اندازه تابع اولیه. و این، امکان می‌دهد که برای عمل $\int$ بنویسیم: $\|\int\| = \frac{1}{2}$.

وقتی با تبدیل‌هایی در فضای با تعداد بعدهای محدود، و مثلاً در صفحه، سروکار داشته باشیم، هر تبدیل A ، متناظر با اندازه $\|A\| = a$ است. ضمناً، می‌توان (با رعایت دقیق تر بعضی جنبه‌های منطقی) ثابت کرد که، برای هر A ، رشته e^A ، متقارب مطلق است. به این نکته توجه کنید که این توضیح، تا چه

اندازه، نسبت به محاسبه‌های عددی تفضیلی در بررسی A^2 ، A^3 و غیره، که به ضرب ماتریس‌ها مربوط می‌شود، ساده‌تر است.

ضمن مطالعهٔ تبدیل‌ها، درفضاهای بی‌نهایت بعدی، باید جانب احتیاط را رعایت کرد، زیرا در این جا، نمی‌توان استدلال کرد که، هر تبدیل A ، حتماً دارای اندازهٔ محدود $\|A\|$ است.

باهمین بررسی کوتاه، روشن می‌شود که توانسته‌ایم به روشنی به استدلالی دست یابیم که میدان کاربرد آن، بسیار گسترده است. مثلاً، می‌توانیم از آن، در عبارت‌هایی به صورت $\frac{1}{1-f}$ ، $\cos \int \sin$ هم - البته، با رعایت احتیاط‌های لازم - استفاده کنیم.

در فصل هفتم قانع شدیم که، آمارگران بیمه‌های اجتماعی، می‌توانند با آسودگی خاطر، از قضیهٔ دوجمله‌ای در عبارت‌هایی به صورت $(1+\Delta)^n$ استفاده کنند. در این جا مثال دیگری می‌آوریم و نشان می‌دهیم که چگونه، با آزادی نسبی، از رشتهٔ نامتناهی با نماد Δ استفاده می‌شود. فرض کنید با تابع تحلیلی $f(x)$ سروکار داشته باشیم و فرض کنید مقادیر این تابع را به ازای عددهای درست بدانیم، یعنی تنها $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ و غیره معلوم باشد. می‌خواهیم $f'(0)$ ، یعنی انحراف تابع را در نقطهٔ $x=0$ محاسبه کنیم. به این ترتیب، استدلال می‌کنیم. بنابر رابطهٔ تیلور داریم:

$$f(x+a) = f(x) + af'(x) + \frac{1}{2}a^2 f''(x) + \dots = \\ = (1 + aD + \frac{1}{2}a^2 D^2 + \dots) f(x)$$

رشتهٔ داخل پرانتز، که تنها سه جملهٔ اول آن را نوشته‌ایم، رشتهٔ مربوط به e^{aD} است. بنابراین، برابری را، می‌توان این طور نوشت:

$$f(x+a) = e^{aD} \cdot f(x)$$

$a=1$ می‌گیریم، درست چپ به دست می‌آید: $f(x+1)$ ، که چیزی جز $Ef(x)$ و یا $(1+\Delta)f(x)$ نیست. اگر نماد $f(x)$ را از دو طرف حذف کنیم، به دست می‌آید:

$$1 + \Delta = e^D$$

اگر از دوطرف لگاریتم بگیریم، به برابری تازه‌ای می‌رسیم:

$$D = \log_e (1 + \Delta) = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \dots$$

و این، یکی از رشته‌های معمولی در نظریه لگاریتم‌هاست که، معمولاً تنها درباره عددها به کار می‌رود. این نتیجه‌گیری نشان می‌دهد، چگونه به وسیله عمل تفاضل‌های محدود - که تنها شامل عددهای درست است - می‌توان دیفرانسیل‌گیری را انجام داد.

بحث فوق، خصلت صوری دارد و تمرین خوبی برای آنالیز تابعی است تا این اثبات صوری را به قطعه‌ای از ریاضیات واقعی تبدیل کند و، ضمناً، نشان می‌دهد که، با چه فرض‌هایی، می‌توان از درستی نتیجه‌ها، اطمینان حاصل کرد.

اصل موضوع‌های فضای باناخی

با تصور فضای متری تبدیل‌ها، به ردیف زیر عمل کردیم. ابتدا مفهوم $\|A\|$ ، اندازه تبدیل A ، را وارد کردیم؛ سپس کشف کردیم که فاصله $d(A, B)$ بین A و B ، همان اندازه تفاضل $B - A$ است. این ردیف را، نه تنها در مورد هایی که به عینی بودن مطلب علاقه‌مندیم، بلکه برای خود تعریف فاصله هم، می‌توان دنبال کرد. می‌توانیم از تعریف اندازه (یا طول) بردار آغاز کنیم و، سپس، $d(A, B)$ را به عنوان طول $B - A$ تعریف کنیم. این ردیف، در بیشتر موردها، ضمن کار با فضاهای باناخی، مورد استفاده قرار می‌گیرد، شرط‌های فضای باناخی را، می‌توان به این ترتیب، تنظیم کرد:

۱. دستگاه باید يك فضای برداری باشد، یعنی در هر ۱۰ شرط

بخش پایانی فصل هفتم، صدق کند.

۲. برای هر بردار v ، اندازه آن $\|v\|$ ، طوری تعریف می‌شود

که با شرط‌های زیر سازگار باشد:

$\|a\|$ ، عددی حقیقی و غیرمنفی است؛

(b) وقتی و تنها وقتی $\|v\| = 0$ ، که داشته باشیم: $v = 0$ ؛

(c) برای هر k داریم: $\|kv\| = |k| \cdot \|v\|$ ؛
 (d) $\|u+v\|$ ، هرگز از $\|u\| + \|v\|$ تجاوز نمی‌کند.
 ۳. فاصله بین u و v ، $d(u,v)$ ، به‌عنوان $\|v-u\|$ تعریف می‌شود.

۴. فضا باید کامل باشد: «زندان‌هایی که لحظه به لحظه تنگ‌تر می‌شوند» یا دستگاه کره‌های بسته‌ای که وارد شده‌اند، حتماً شامل برداری باشند.

این شرط‌ها، که همه دستگاه‌های مهم و اساسی ریاضی رادر برمی‌گیرند، به‌وسیله باناخ طرح شد. دان فورد و شوارتز، در فصل ششم کار بزرگ فرهنگ گونه خود، فهرستی از بیست و شش نوع فضای باناخ را داده‌اند، یعنی بیست و شش موضوع مختلف ریاضی که، در مورد هر کدام از آن‌ها، سیاهه شرط‌های بالا صدق می‌کند. بعضی از این موضوع‌ها، به بخش‌های کاملاً بغرنج ریاضیات مربوط می‌شوند و تنها برای متخصصان قابل فهم است؛ ولی بقیه، شبیه آن چه در این فصل دیدید، برای هر کسی که دوره عمومی ریاضیات را بداند، قابل درک است. فضاهای باناخ، در گوناگون‌ترین شاخه‌های ریاضیات، کاربرد دارند. ولی، به احتمال زیاد، نمی‌توان از فضاهای باناخ، مثلاً در مورد رسم یا محاسبه‌ای که برای بریدن فلز به قطعه‌هایی با شکل و اندازه معین لازم است، استفاده کرد. ولی به‌هر حال مهندسانی هم که، برای کار خود، به مطالعه آنالیز ریاضی، رشته‌های نامتناهی و ماتریس‌ها مشغول‌اند، می‌توانند، به‌اندازه کافی، از فضاهای باناخ استفاده کنند.

در فضای باناخ، عنصرهای زیادی از هندسه اقلیدسی وجود دارد: خط‌های راست و صفحه‌ها، دایره‌ها و کره‌ها، متوازی‌الاضلاع‌ها و نیمسازها ولی، در این فضا، همه‌چیز روشن، ساده و در دسترس نیست. به‌روشنی، نمی‌توانیم این فضا را پیش خود تصور کنیم؛ مطمئن نیستیم که موضوع‌هایی مثل خط راست، صفحه و غیر آن، که نام‌هایی کاملاً آشنا دارند، رفتاری عادی و آشنا داشته باشند. کار نظریه فضاهای باناخ هم همین است که این

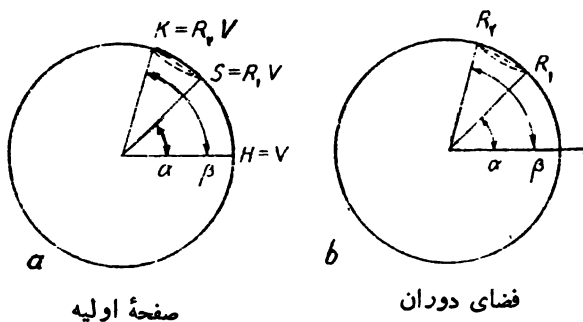
ابهام‌ها را برطرف کند. از چهار اصل موضوع فوق، و به کمک استنتاج‌های منطقی، می‌توان قضیه‌هایی را ثابت کرد که کاملاً قابل اعتماد باشند. به عنوان نمونه، می‌توان از قضیه‌ای یاد کرد که مسألهٔ مربوط به برابری ضلع‌های مقابل متوازی الاضلاع را روشن می‌کند. به کمک اصل موضوع ۳، که فاصلهٔ $d(u,v)$ را تعریف می‌کند، می‌توان پاسخ مثبت به این پرسش را تضمین کرد. از طرف دیگر، نمونه‌هایی از نوع «متریک شاه شطرنج» - که در آن‌جا دایره‌ها به صورت متوازی الاضلاع‌ها هستند، این نظریه، ما را با چنان موضوع‌های نامنتظری روبه‌رو می‌کند که تنها در فضاهای باناخی به آن‌ها برمی‌خوریم.

يك فضای متری

به‌یا دارید که، با مطالعهٔ این پرسش که کدام دو دوران را می‌توان نزدیک به هم دانست، به تعریف فاصلهٔ بین دو تبدیل رسیدیم. اگر به‌همهٔ این‌ها با دقت بیشتری توجه کنیم و حرکت را به معنای دوران دور مبداء O و قرینهٔ نسبت به خط‌های راستی که از نقطهٔ O می‌گذرند (فصل نهم) در نظر بگیریم، آن وقت متوجه می‌شویم که بایک فضای متری کوچک، ولی بسیار جالب، سروکار داریم.

فرض کنید، به یکی از دانش‌آموزان، مجموعه‌ای از برچسب‌هایی را بدهیم که با نمادهایی برای نام‌گذاری دوران‌های دور مبداء، مشخص شده باشند و از او خواهش کنیم که، آن‌ها، به نحوی منظم کند که نوعی ارتباط با یکدیگر داشته باشند. طبیعی است انتظار داشته باشیم، دانش‌آموز، برچسب‌ها را، به این ترتیب، مرتب کند: «دوران به اندازهٔ ۰ درجه»، «دوران به اندازهٔ ۱ درجه»، «دوران به اندازهٔ ۲ درجه» و غیره. بارسیدن به برچسب «دوران به اندازهٔ ۳۵۹ درجه»، دانش‌آموز، به احتمال زیاد، متوجه می‌شود که دوران به اندازهٔ ۳۶۰ درجه، به همان نتیجهٔ دوران به اندازهٔ ۰ درجه می‌رسد و تصمیم می‌گیرد، دو انتهای دنباله را به هم وصل کند. ضمناً، باز هم به احتمال زیاد، ۳۶۰ برچسب را، به طور یکنواخت، روی دایره‌ای جا می‌دهد. این ترتیب تنظیم، با تعریفی که برای فاصله، در بخش «رشته‌های

تبدیل» همین فصل داشتیم، سازگار است و فضای متری دوران را، با شرط این که دایره را به شعاع ۱ گرفته باشیم، به ما می دهد. برای سادگی کار، دوران به زاویه α را M_α و دوران به زاویه β را M_β می نامیم.

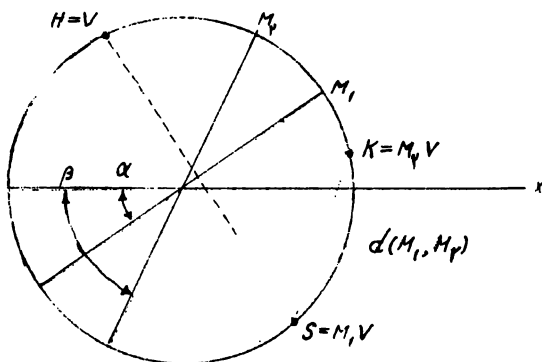


شکل ۹۴

آنچه که، هم اکنون، درباره وضع قرار گرفتن برچسب های نمادی شرح دادیم، روی شکل ۹۴ - b نشان داده شده است. فاصله بین موضع آنها را قطری از دایره واحد می گیریم که روبه روی زاویه مرکزی $\alpha - \beta$ قرار دارد. بنابراین فاصله بین دو دوران، $d(R_1, R_2)$ باید حداکثر فاصله بین بردارهای $R_1 v$ و $R_2 v$ باشد، که بردار v در آنها وارد شده است، که طول آن، از ۱ تجاوز نمی کند. در شکل ۹۴ - a، نقطه H ، که متناظر با بردار v است، و جای جدید آن S و K ، که در نتیجه دوران R_1 و R_2 به دست آمده اند، نشان داده شده است. بدون ارتباط به انتخاب نقطه H در روی محیط دایره، فاصله SK همیشه یکی است و، از نظر هندسی، روشن است که، طول SK در شکل ۹۴ - a، با فاصله R_1 تا R_2 در شکل ۹۴ - b، یکی است.

حالا به انعکاس (تقارن محوری) می پردازیم. همان طور که در شکل ۹۵ نشان داده شده است، دو آئینه M_α و M_β را در نظر می گیریم که زاویه های α و β را با هم ساخته باشند. دوباره، نقطه H را روی محیط دایره انتخاب می کنیم، که تصویر آن در M_α و M_β ، به ترتیب، در نقطه های S و K قرار می گیرد. H را به هر نحوی روی محیط دایره انتخاب کنیم، باز هم

فاصله SK بی تغییر می ماند و، بنابراین، حداکثر جدایی مورد نظر نقطه ها را می دهد. سپس، فرض می کنیم که، جای نقطه H ، متناظر با زاویه θ



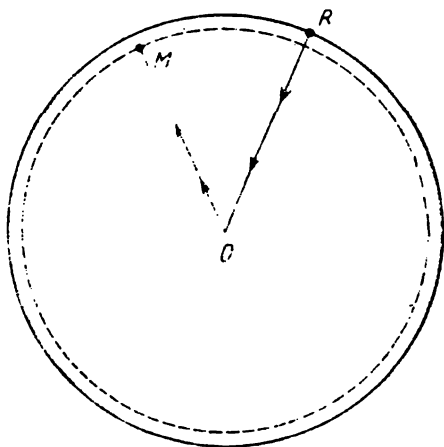
شکل ۹۵

باشد، یعنی OH با محور Ox زاویه ای برابر θ بسازد. می توان ثابت کرد که موضع زاویه ای نقطه های S و K ، به ترتیب، با مقادیرهای $(2\alpha - \theta)$ و $(2\beta - \theta)$ معین می شوند. بنابراین، اختلاف آن ها، برابر است با $2(\beta - \alpha)$ ، زاویه مرکزی روبه روی وتر SK . در فضای متری مفروض، انعکاس M_1 و M_p ، باید با فاصله ای برابر SK از هم جدا شوند. و به این وضع وقتی می توان رسید که انعکاس، در روی دایره به شعاع واحد باموضع زاویه ای 2α برای M_1 و 2β برای M_p قرار گیرد. بنابراین، موضع هر انعکاس در فضای متری، با زاویه ای معین می شود که دو برابر زاویه ای است که آئینه (در صفحه اولیه) با محور Ox تشکیل می دهد. نام گذاری های انعکاس، دایره واحد را پرمی کنند، ولی تنها برای وقتی که زاویه بین آئینه و محور Ox ، برحسب درجه، از ۰ تا ۱۸۰ درجه باشد. آئینه ای که با محور Ox زاویه ۱۸۰ درجه تشکیل دهد، همان انعکاسی را می دهد که آئینه با محور Ox زاویه ای برابر ۰ درجه ساخته باشد.

به این ترتیب، دوران و انعکاس، دایره را پرمی کنند. طرح این پرسش جالب است که: فاصله بین دوران و انعکاس یعنی چه؟ آیا برای هر دوران، انعکاسی وجود دارد که بتوان آن را نزدیک به دوران به حساب آورد؟ ممکن

است کسانی باشند که گمان کنند ، پاسخ به پرسش دوم منفی است. برای هرانعکاس M و دوران R ، همیشه می توان بردار v را متناظر با نقطه H روی دایره واحد پیدا کرد که، Mv و Rv در دو انتهای متقابل قطر قرار گیرند و، بنابراین، فاصله بین آنها، ۲ واحد باشد. از آن جا که این، بیشترین فاصله ممکن بین Mv و Rv است، پس $d(M, R) = 2$ ؛ به زبان دیگر، هرانعکاسی در ۲ واحدی هردورانی قرار دارد.

به سادگی می توان مدل این فضا را ساخت. روی شکل ۹۶ ، خط پیوسته روی صفحه کاغذ، نماینده دایره به شعاع واحد است؛ فرض می کنیم که، برچسب های موبوط به دوران را، در طول آن قرارداده باشیم. قسمت



شکل ۹۶

خط چین ، بازهم دایره ای با شعاع واحد را نشان می دهد که باید در پشت صفحه کاغذ رسم شده باشد. در طول این دایره ، برچسب های مربوط به انعکاس ها را قرار داده ایم. از دایره روبه رو به دایره پشت، تنها با استفاده از سوراخ کوچکی در نقطه O می توان عبور کرد. بنابراین، کوتاه ترین مسیر از هردوران تا هرانعکاس، از «جاده» ROM ممکن است (روی شعاع RO به طرف سوراخ O و در طرف دیگر کاغذ، از طریق شعاع OM)، که ۲ واحد را تشکیل می دهد.

یادداشتی درباره نام گذاری تابع‌ها

تقریباً در همه کتاب‌هایی که، در این اواخر، در زمینه ریاضیات منتشر شده است، از تابع‌ها به صورتی غیر از کتاب‌های سنتی نام برده شده است. چه چیزی، موجب این تغییر شده است؟ به شکل ۹۱ توجه کنیم که، در آن، نمودار تابعی را می‌بینیم که، به طور کامل، بالای محور Ox قرار دارد. همان طور که روشن کردیم، اندازه این تابع، به وسیله حداکثر مقدار $f(x)$ داده می‌شود. بنا بر اصطلاح‌های سنتی، ناچار بودیم بگوییم: «اندازه تابع $f(x)$ ، به وسیله حداکثر مقدار $f(x)$ داده می‌شود». این گونه تعریف، بی معنی به نظر می‌آید: اندازه یک چیزی، به وسیله حداکثر همان چیز تعریف و معین می‌شود. در واقع، در این جا، دوبار به نماد f برمی‌خوریم، که مفهوم‌های متفاوتی دارند. در حالت اول، برای مقدارهای تابع مورد استفاده قرار می‌گیرد و، در حالت دوم، به معنای عدد معینی است. ما وقتی می‌توانستیم تابع را به کمک نمودار مشخص کنیم که می‌شد اندازه تابع را به عنوان اندازه نمودار تعریف کرد. برای موقعیت شکل ۹۱، می‌توانستیم بگوییم: «اندازه نمودار به وسیله حداکثر ارتفاع نقطه‌های این نمودار در بالای محور Ox ، داده می‌شود».

هر دو بخش حرف‌های خوابیده، در این عبارت، در ریاضیات سنتی، با یک نماد f نشان داده می‌شوند، اگرچه روشن است که، در حالت اول، معرف تمامی نمودار است، در حالی که، در حالت دوم، ارتفاع یکی از نقطه‌های آن را بیان می‌کند.

ذهن ما، همیشه به دنبال معنای دقیق واژه‌هایی که بیان می‌کند، نمی‌رود و، در نتیجه، کسانی که با علامت گذاری‌های سنتی کار می‌کنند، با به کار بردن این نماد به دو مفهوم مختلف، دچار سرگردانی نمی‌شوند. توجه آن‌ها، نه به واژه‌های جداگانه یا نمادهای مورد استفاده، بلکه روی خود مسأله، در مجموع و به طور کلی، متمرکز می‌شود. اندیشه‌ای که طرح شده، برای او روشن است و دلیلی نمی‌بیند که، ذهن خود را، برای شکل بیان آن دچار پریشانی کند.

می‌توان، عمیق‌تر با مطلب روبه‌رو شد و به تعریف‌هایی کاملاً دقیق و منطقی رسید. من در امریکا، دانشجویانی را می‌شناسم که، تنها به این خاطر که آنالیز ریاضی، در شکل «معاصر» خود، بحث‌های مقدماتی مفصلی در بارهٔ تابع، حوزهٔ تعریف و حوزهٔ تغییر به‌ارمغان آورده است، نتوانسته‌اند آنالیز ریاضی را فرا گیرند و بر آن مسلط شوند. از طرف دیگر، اختلاط نام‌گذاری‌ها در روش سنتی، به‌هرحال، ضمن مطالعهٔ آنالیز ریاضی، اشکال ایجاد می‌کند. همه می‌دانند که، دانش‌آموزان، می‌توانند به‌سادگی از عهدهٔ رسم نمودار تابع $y = 2x + 3$ برآیند، در حالی که در حالت تابع $y = 3$ ، به‌دشواری برمی‌خورند. شاید، دلیل اشکال مربوط به این باشد که، دربرابری $y = 2x + 3$ ، روش تنظیم تابع را می‌بینند، درحالی که، دربرابری $y = 3$ ، تنها يك عدد را مشاهده می‌کنند.

تابع، نوع پاسخ‌گویی را در خودش جمع کرده است. در حالت تابع $y = 2x + 3$ ، اگر شما عدد ۱ را برای x نام ببرید، من عدد ۵ را برای y نام می‌برم؛ وقتی که $2 +$ را نام می‌برید، پاسخ شما را با عدد $7 +$ می‌دهم و غیره. ولی، ضمن رسم نمودار $y = 3$ ، در موقعیتی هستیم که، هر عدد برای x نام ببرید، من هربار باید با عدد ۳ به شما پاسخ بدهم.

یکی از راه‌های نمایش مشروط این تناظرین x و y ، استفاده از نمادهای نگاشت است. مثلاً، نگاشت زیر را به $y = 2x + 3$ مربوط می‌کنیم: $5 \rightarrow 1$ ، $7 \rightarrow 2$ و غیره: «پاسخ من $\rightarrow$ انگیزهٔ شما» بنابراین، باید دربارهٔ تابع، همچون نگاشت $2x + 3 \rightarrow x$ صحبت کنیم. با این روش، در حالت نمودار تابع $y = 3$ ، باید از دانش‌آموز بخواهیم تا نگاشت به‌صورت $3 \rightarrow x$ را نمایش دهد، به‌عنوان نمونه‌ای از زندگی روزانه، در این‌جا، می‌توان درجهٔ حرارت ثابت را در نظر گرفت، اگر در جریان x دقیقه‌ای که از آغاز آزمایش گذشته است، از من دربارهٔ درجهٔ حرارت پپرسید، من پاسخ می‌دهم: « $3 +$ درجه»؛ به‌ازای هر مقدار x ، پاسخ باید یکی باشد: « 3 درجه». در فصل سوم، نمونه‌ای از این‌گونه نگاشت را داشته‌ایم: نگاشت $5 \rightarrow 7$ در مورد بانک ورشکسته، وقتی که هر سرمایه‌ای بگذاریم، همیشه يك مقدار به دست می‌آوریم: «هیچ».

با این دستگاه نام گذاری، دیگر می توانیم به جای اینکه درباره تابع x^2 صحبت کنیم، از نگاشت $x \rightarrow x^2$ حرف بزنیم و به جای تابع $f(x)$ بگوییم نگاشت $f(x) \rightarrow x$.

دستگاه دیگر نام گذاری، از این اندیشه سرچشمه می گیرد که خصلت های تابع را، می توان به طور کامل، به وسیله نمودار آن مشخص کرد. اگر در این مسیر، جلوتر برویم، می توانیم بگوییم تابع، یعنی نمودار. مثلاً تابع $y = x^2$ ، از نقطه های $(0,0)$ ، $(1,1)$ ، $(2,4)$ ، $(3,9)$ ، $(\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$ و غیره

تشکیل شده است. در موقع نوشتن همه زوج ها، ردیف عددها، اهمیت جدی دارد. مثلاً زوج $(9,3)$ ، برخلاف زوج $(3,9)$ ، معنای دیگری دارد و نقطه متناظر آن، بر نمودار $y = x^2$ قرار نمی گیرد، یعنی زوج $(3,9)$ ، يك زوج مرتب است. مجموعه این نوع زوج ها را «مجموعه دوتایی های مرتب» گویند، که نمودار تابع را تشکیل می دهند. بنابراین، تابع با نمودار $y = x^2$ را می توان به عنوان «مجموعه دوتایی های مرتب به صورت (x, x^2) » تعریف کرد، در مرحله های اول آموزش ریاضی، این روش که می گوید: تابع و نمودار آن، يك چیزند، بی فایده و تو خالی به نظر می آیند. ولی در مرحله های بالاتر، این تعریف، ارزش خود را پیدا می کند. مثلاً همان طور که در پایان فصل اول یادآوری کردیم، تابع های بامتغیر مختلط، این تمایل را در ما به وجود می آورند که، آن ها را، به صورت نمودارهایی در چهار بعد نشان دهیم. تعریفی که در بالا آوردیم، به ما امکان می دهد تا این نمودار را مشخص و ویژگی های آن را پیدا کنیم. یعنی در این مورد و هم در سطح بالاتر مطالعه ریاضیات، سودمندی این روش ظاهر می شود. در هر حالتی، مهم این است که بدانیم این همه تعریف ها از کجا آمده اند و در هر مرحله از آموزش ریاضی، کدام يك از آن ها، می تواند سودمند باشد.

در فصل سوم، با نمونه های مختلفی از نگاشت آشنا شدیم، برای مشخص بودن وضع، صفحه کاغذ شطرنجی و نگاشت T را در نظر می گیریم، که عبارت است از نگاشت نسبت به محور Ox و هر بردار v را به بردار v^* تبدیل می کند، که در آن: $v^* = Tv$. چون ثابت کردیم که نگاشت و تابع، مترادف اند،

بنابراین T ، درعین حال، يك تابع است. بنابراین دستگاه سنتی نام گذاری، كه تابع را بانماد $f(x)$ نشان می دهیم، دراین جا هم، می توانستیم از نگاشت $T(v)$ صحبت كنیم. ولی، این كار را نمی كنیم. در همان آغاز فصل سوم هم، به طور ساده، از تبدیل یا ماتریس T صحبت می كردیم Tv را، نه به معنای تابع بلکه به معنای نقطه (یا برداری) گرفتیم كه، نقطه (یا بردار) v در نتیجه تبدیل T ، منجر به آن می شود، اگر درباره T ، به عنوان يك تابع، صحبت كنیم، آن وقت در حالت مفروض، بایك تابع خطی ساده سروكار داریم. ولی این وضع، تأثیری بردستگاه نام گذاری نمی گذارد، و از آن، می توان برای هر تابعی استفاده كرد. در نمودار شكل ۹۱، نوشته شده است «تابع f »، و همان جا، برای اندازه تابع f ، از نماد $\|f\|$ استفاده شده است. دراین جا، از يك حرف f ، هم برای نام گذاری تمام نمودار و هم برای نام گذاری تابعی كه به وسیله این نمودار معین می شود، استفاده شده است. از يك حرف f ، هم در نام گذاری $\left(\frac{1}{p}\right) f$ ، كه تنها يك عدد مشخص است (ارتفاع نمودار به ازای $x = \frac{1}{p}$)، و هم در نام گذاری $f(x)$ كه باز هم معرف يك عدد است (ارتفاع نمودار در نقطه متناظر x) استفاده می شود. توجه كنید كه، چگونه نام گذاری عادی و سنتی $f(x)$ ، در درون نام گذاری های امروزی، به زندگی خود ادامه می دهد. ما هنوز درباره منحنی با معادله $y = f(x)$ صحبت می كنیم كه، در واقع، به این معناست كه: منحنی از همه نقطه های (x, y) تشكيل شده است كه، برای آنها، داشته باشیم: $y = f(x)$.

پاسخ تمرین‌ها

فصل دوم

۱. نقطه F .
۲. در نقطه‌های G و A ، در گام‌های اول و سوم.
۳. در نقطه‌های D و B ، در گام‌های اول و دوم.
۴. نه.
۵. بله. نقطه G .
۶. $2c - d - e - 3f + 2g$.
۷. از طریق نقطه‌های E و A ، در گام‌های اول و دوم.
۸. شکل ۱۰ را ببینید.

فصل سوم

۱. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. برای برقراری است.
۲. $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
۳. هیچ اختلافی وجود ندارد، آن‌ها برابرند.
۴. O .
۵. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
۶. در هر دو طرف $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

۷. $U^2 = I$ ، ماتریس در معادله صدق می کند.

۸. $AB \neq BA$ ؛ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

۹. (۱) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ ؛ (۲) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ؛ ماتریس (۲) برابر است، ولی ماتریس (۱) برابر نیست.

۱۰. بله. پاسخ همان است که در تمرین ۶ بود.

۱۱. O .

۱۲. O .

۱۳. $E^2 - 8E = 3I$ ، بنابراین $k = 3$.

۱۴. این معادله چنین است: $F^2 + 7I = 6F$.

۱۵. $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ ؛ $\begin{pmatrix} 2+k & 4 \\ 6 & 2+k \end{pmatrix}$. عبارت‌ها، به ازای $k = 5$ ؛ برابرند.

۱۶. $k = 1$ ، $q = 3$.

۱۷. بخش بعدی فصل پنجم را ببینید.

۱۸. ماتریس C از تمرین ۱۱.

۱۹. ماتریس F از تمرین ۱۴.

۲۰. $I = P + S$ ؛ $G = P + 2Q + 3R + S$.

۲۱. بله.

۲۲. بله.

۲۳. بله. چهار بعدی.

۲۴. فضای خطی ۹ بعدی.

۲۵. I .

فصل چهارم

۱. $Y^* = -Y$ ؛ $X^* = X$ (a)؛ $Y^* = 4Y$ ؛ $X^* = 2X$ (b)

$Y = 0$ ؛ $X^* = 2X$ (c)

۲. W ؛ U .

فصل پنجم

تبدیل به صورت $a^* = -a$ ؛ $b^* = b$ ؛ $c^* = -c$ ، که دورانی است به اندازه ۱۸۰ درجه دور خط راست b . انواریان‌های فضا عبارتند از صفحه $b = 0$ و خط راست b . هر بردار واقع بر صفحه، در نتیجه تبدیل، به متقابل خود تغییر می‌کند، $\lambda = -1$. هر بردار واقع بر خط راست، بی تغییر می‌ماند، $\lambda = +1$.

فصل هفتم

۱. $x^2 - 1 - D^2$. منطبق نیست.

۱.۲.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (2) \text{ و } (1) X^3 = 0, X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 3.$$

نتیجه‌ها سازگارند. یکی بودن نتیجه‌ها را، می‌شد پیش‌بینی کرد: چند جمله‌ای‌های نسبت به یک ماتریس، رفتاری شبیه جبرمقدماتی دارند. بنابراین قضیه دوجمله‌ای: $(I + X)^{10} = I + 10X + 45X^2$ ؛ و توان‌های بالاتر X ، صفرند.

$$4. A^3 + AAB + ABA + BAA + ABB + A^2 + AB + BA + B^2 + BAB + BBA + B^3 + A^2 + A^2B + ABA + \dots \text{ که برابر است با } BA^2 + AB^2 + BAB + B^2A + B^3$$

۵. همه شرط‌ها. به جز ۱۰ و ۱۲، صدق می‌کنند. شرط ۱۰ برقرار نیست، زیرا معادله $2x = 2$ دو جواب دارد: ۱ و ۰.۶، درحالی که معادله $2x = 1$ جواب ندارد. شرط ۱۲ برقرار نیست، زیرا مثلاً $5 \times 2 = 10$ ، درحالی که $2 \neq 0$ و $5 \neq 0$. این دستگاه، یک حلقه جابه‌جایی است که دارای عضو واحد است. قضیه دوجمله‌ای در مورد آن، صدق می‌کند.

۶. همه شرط‌ها، در آن، صدق می‌کنند. میدان. نقش صفر (شرط ۴) به عهده ۰ است. نقش I (شرط ۹) به عهده ۱ است. قضیه دو جمله‌ای، برقرار است.

۷. مجموع دو عدد فرد، عددی زوج است. بنابراین، جمع در درون این دستگاه، معین نیست. بنابراین، شرطهای ۱ تا ۵، ۱۱ و ۱۲، یکباره از صف خارج می‌شوند. شرطهای ۶ تا ۹ برقرارند. نقش I به عهده ۱ است. شرط ۱۰ برقرار نیست: معادله $5x = 5$ ، پنج جواب دارد. معادله $5x = 1$ جواب ندارد، هیچ يك از گروههای شرط در دستگاه صدق نمی‌کنند و، بنابراین، از بین نام‌هایی که، برای دستگاه‌ها، در فصل داشتیم، هیچ کدام قابل تطبیق بر این دستگاه نیستند. قضیه دوجمله‌ای را هم نمی‌توان تنظیم کرد، زیرا این قضیه، براساس جمع، بنا نهاده شده است.

فصل نهم (بخش «دوران و انعکاس»)

۱. دوران با $c = aA + bB$ ، $s = bA - aB$ ، ضمناً، طبق معمول $c^2 + s^2 = 1$.

۲. $XY = YX = I$ ولی $X \neq Y$ مثلاً

$$XY = M_1 M_2 M_2 M_1 = M_1 I M_1 = M_1^2 = I$$

زیرا $M_1^2 = I$ و $M_2^2 = I$.

۳. انعکاس.

فصل نهم (بخش «تغییر محورها»)

$$۱. V = P + Q + R.$$

$$۲. V = P + 2Q + 3R.$$

پرویز شهریاری، مترجم
"مسیر ریاضیات جدید" از مردم
کرمان است و در سال ۱۳۰۵، در
خانواده‌ای زرتشتی و تهی‌دست بدنیا آمد.
پرویز شهریاری، به جز تالیف و ترجمه
بیش از ۱۵۰ کتاب ریاضی، در زمینه‌های گوناگون دانش
نظری، تاریخ و فلسفه، کتاب‌هایی دارد و مقاله‌های فراوان او را
می‌توان در بیشتر نشریه‌های چهل سال اخیر پیدا کرد. ماهنامه "سخن
علمی" در سال‌های چهل، به سردبیری او منتشر می‌شد. در سال‌های پایانی
دهه پنجاه نشریه "آشنایی با دانش" را منتشر می‌کرد و سال‌هاست که
سردبیری ماهنامه "چیستا" و فصل‌نامه "آشنایی با ریاضیات" را به عهده دارد.



سازمان چاپ و نشر مشهد



قیمت: ۱۴۰ تومان